# デカルト「音楽提要」に関係するメモ

## 1　対数の利用

- 対数は「発見」されたのではなく「発明」された。
- 人間は直線は認識しやすい。しかし、曲線は認識しにくい。

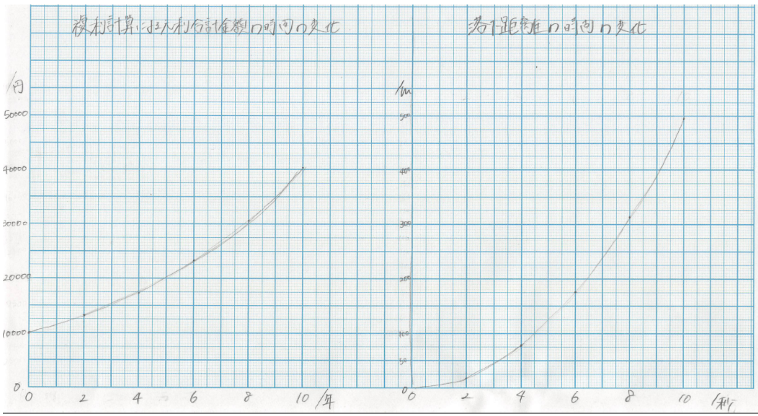


図 1: 曲線のグラフ

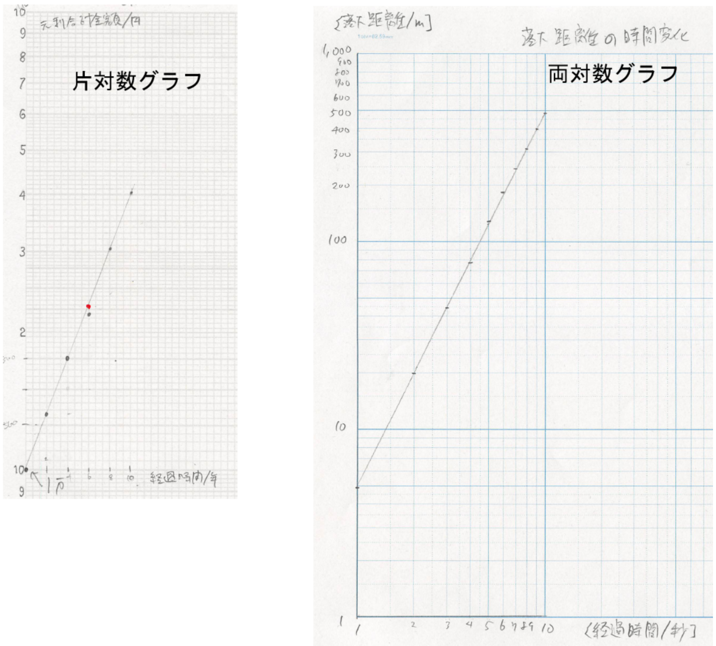
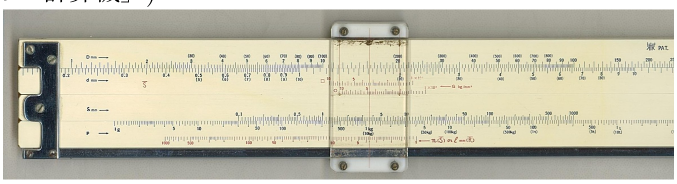



図 2: 曲線のグラフ (片対数グラフと両対数グラフ)

- 計算尺 (私の世代以上の「計算機」)

かけ算を計算できる。(画像は http://www.keisanjyaku.com/sliderule/bane/bane.html から)

## 2 指数法則と対数

指数法則

1. $10^2 \times 10^3 = 10^{2+3}$

   肩の計算が足し算になることがポイント。足し算と引き算は兄弟で、引き算は負の数を足すことと考えられる。すると、$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ であれば都合よい。

$$\begin{aligned} 10^5 \times 10^{-3} &= \underline{10^{5-3} = 10^2} \\ 10^5 \div 10^3 &= \underline{10^{5-3} = 10^2} \end{aligned}$$

2. $(10^3)^2 = 10^{2\times 3}$

   肩の計算がかけ算になることがポイント。かけ算と割り算は兄弟で、割り算は逆数をかけることと考えられる。すると、$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ とすると、都合よい。

$$\begin{aligned} \left(10^6\right)^{\frac{1}{2}} &= \underline{10^{\frac{6}{2}} = 10^3} \\ \sqrt{10^6} &= \underline{10^3} \end{aligned}$$

対数の定義と性質

1. 定義

   $\log_2 8$ とは、「2 を何乗したら 8 になるか、その数」

2. 練習

   - $\log_2 4 =$ ________________
   - $\log_2 8 =$ ________________
   - $\log_3 27 =$ ________________
   - $\log_{10} \sqrt{10} =$ ________________
   - $2^{\log_2 8} =$ ________________
   - $2^{\log_2 10} =$ ________________

3. 対数の性質

   - $\log_2(3 \times 5) = \log_2 3 + \log_2 5$
     かけ算を足し算にできる。

$$\begin{aligned} 3 \times 5 &= 2^{\log_2(3\times 5)} \\ &= 2^{\log_2 3} \times 2^{\log_2 5} \\ &= 2^{\log_2 3 + \log_2 5} \\ \therefore \log_2(3 \times 5) &= \log_2 3 + \log_2 5 \end{aligned}$$

   - $\log_2 10^3 = 3 \log_2 10$
     対数の中の数 (真数) の肩の数 (指数) は、前に出せる。

$$\begin{aligned} 10^3 &= 2^{\log_2(10^3)} \\ &= \left(2^{\log_2 10}\right)^3 \\ &= 2^{3\times\log_2 10} \\ \therefore \log_2 10^3 &= 3 \log_2 10 \end{aligned}$$

   - $\log_2 10 = \frac{1}{\log_{10} 2}$
     底と真数を交換すると逆数になる。

$$\begin{aligned} 2^{\log_2 10 \times \log_{10} 2} &= \left(2^{\log_2 10}\right)^{\log_{10} 2} \\ &= 10^{\log_{10} 2} \\ &= 2 = 2^1 \\ \therefore \log_2 10 \times \log_{10} 2 &= 1 \end{aligned}$$

# 3　平均律

振動数の比率で音階を決めている。1 オクターブは、半音を 12 回繰り返すことで到達する音程差である。半音の振動数の比率を、$r$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned} 2 &= r \times r \times \cdots \times r = r^{12} \\ 2^{\frac{1}{12}} &= r \\ \therefore r &= 1.05946309436 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 = \log_2 2 &= \log_2 r^{12} = 12 \log_2 r \\ \therefore \log_2 r &= \frac{1}{12} \\ \log_r 2 &= 12 \end{aligned}$$

これに基づいて平均律の振動数を計算すると次のようになる。

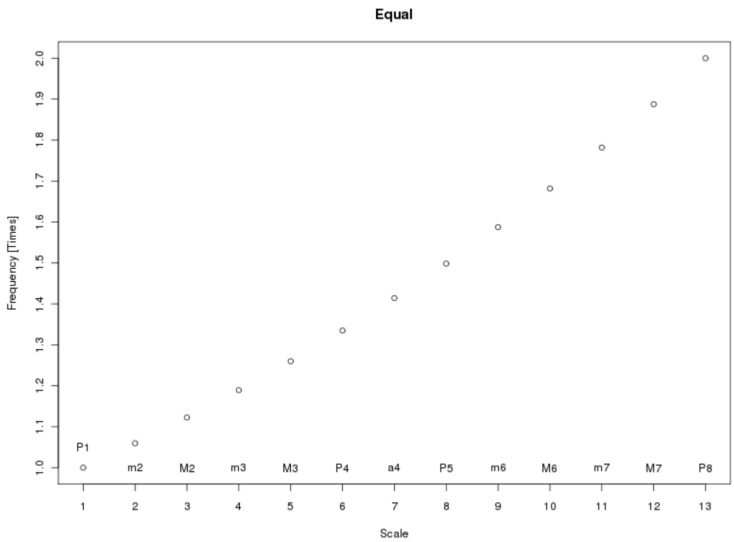



図 3: 平均律

縦軸の目盛を対数目盛にすると次のようにになる。

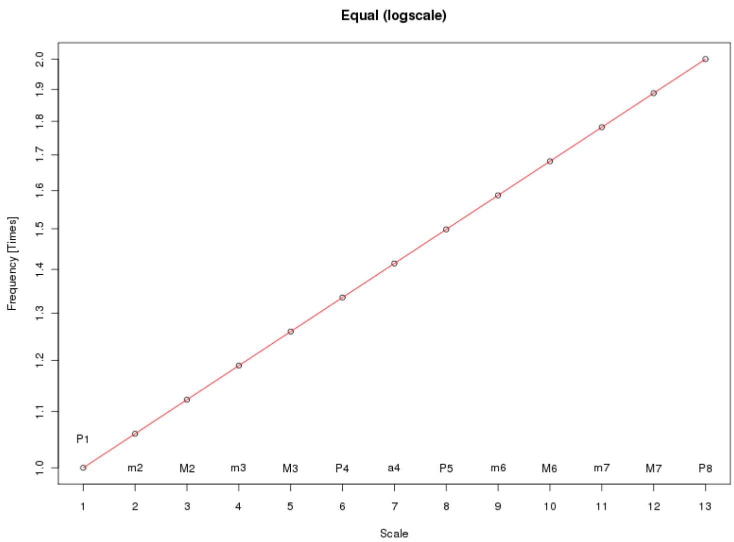



図 4: 平均律 (縦軸対数目盛)

セント：半音を更に 100 等分した振動数比をセントという。

$$\begin{aligned} s^{100} &= 1.05946309436 \\ \therefore s &= 1.00057778951 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 s^{100} = 100 \log_2 s &= \log_2 r \\ \log_2 s &= \frac{1}{100} \log_2 r = \frac{1}{1200} \end{aligned}$$

# 4　ピュタゴラス音律

基音に対して、3/2 倍の割合で振動数を増やしていくとどうなるか。（正確には、基音に対して、高い側に 8 回、低い側に 3 回行って 12 音を得るようです。）

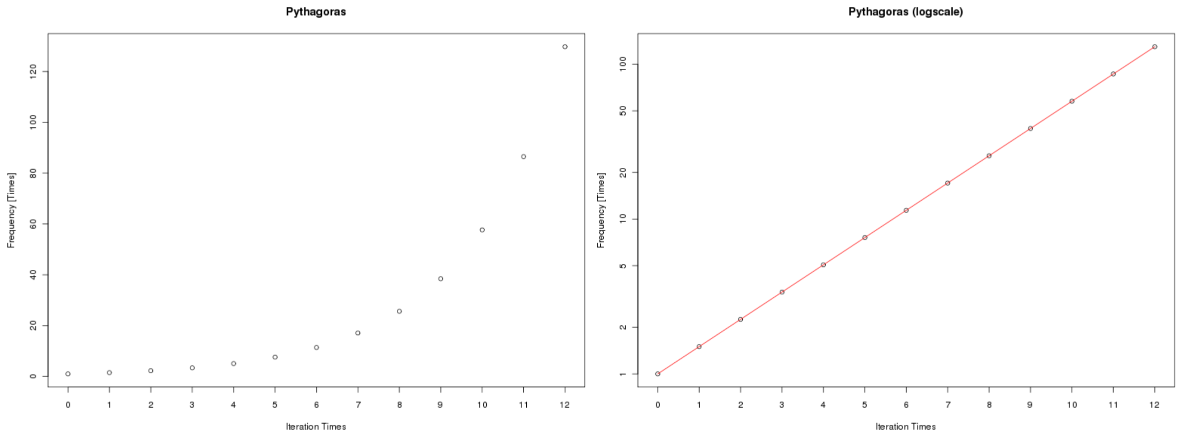



図 5: ピュタゴラス音律-1- 3/2 倍を繰り返す

これをオクターブ（2 倍）を越えるところで、低いオクターブへ移行させる。

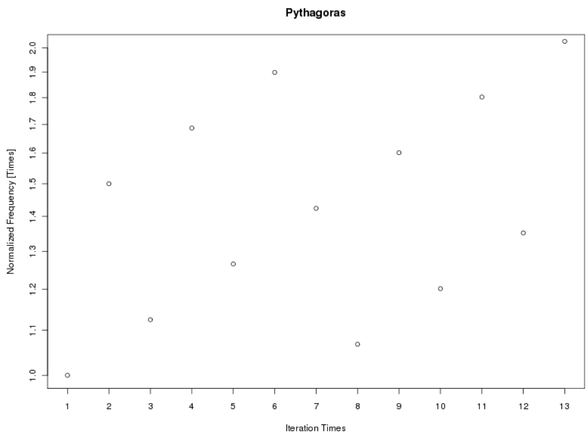



図 6: ピュタゴラス音律-2- オクターブの中に取り込む

振動数の順番にする。

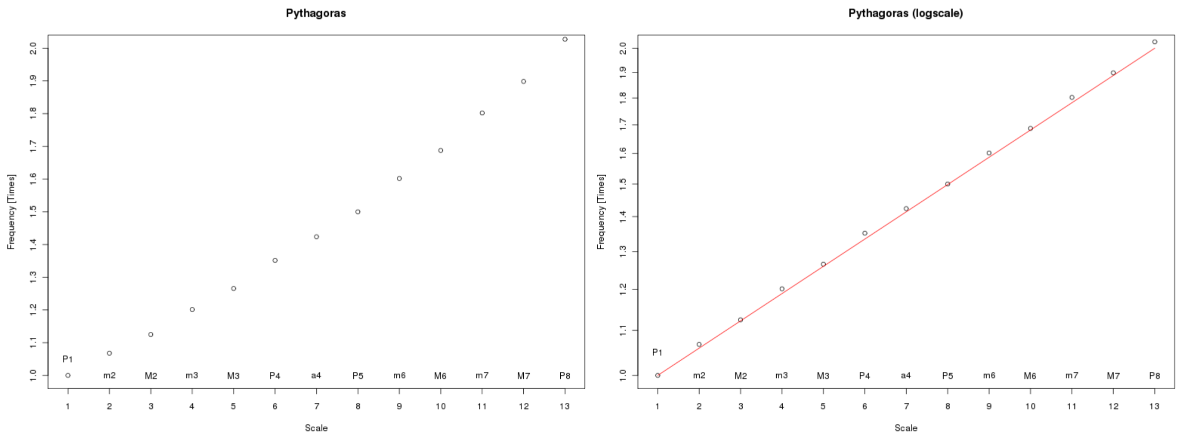



図 7: ピュタゴラス音律

※ ピタゴラス音律の整数比：$[\ 1, \frac{2187}{2048}, \frac{9}{8}, \frac{19683}{16384}, \frac{81}{64}, \frac{177147}{131072}, \frac{729}{512}, \frac{3}{2}, \frac{6561}{4096}, \frac{27}{16}, \frac{59049}{32768}, \frac{243}{128}, \frac{531441}{262144}]$
※ 半音の振動数比： $[\frac{2187}{2048}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \frac{256}{243}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}]$
※ 全音は (ほぼ常に)、$\frac{2187}{2048} \times \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$ となる。これは、純正律の大全音と同じである。
※ ピュタゴラスコンマ: $\frac{531441}{262144} = \frac{3^{12}}{2^{18}}$ と $2 = \frac{262144\times 2}{262144}$ とのずれである $\frac{531441}{262144\times 2} = \frac{531441}{524288} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$

**ある比率 $R$ が「何半音分か」あるいは「何セントか」を求める**

1. $R$ は何半音分 ($h$) か。
   半音の比率を $r$ とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} R &= r^h \\ \log_r R &= h \log_r r = h \end{aligned}$$

   あるいは、次のようにしてもよい。

$$\begin{aligned} R &= r^h = \left(2^{\log_2 r}\right)^h = 2^{h \log_2 r} = 2^{\frac{h}{12}} \\ \log_2 R &= \frac{h}{12} \\ \therefore h &= 12 \log_2 R \end{aligned}$$

2. $R$ は何セント分 ($c$) か。
   1 セントの比率を $s$ とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} R &= s^c \\ \log_s R &= c \log_s s = c \end{aligned}$$

   あるいは、次のようにしてもよい。

$$\begin{aligned} R &= s^c = \left(2^{\log_2 s}\right)^c = 2^{c \log_2 s} = 2^{\frac{c}{1200}} \\ \log_2 R &= \frac{c}{1200} \\ \therefore c &= 1200 \log_2 R \end{aligned}$$

**うなり**

ちょっとだけ振動数が違う音はうなる。波の位相が互いにずれ、強め合ったり、打ち消し合ったりを交互にするからである。

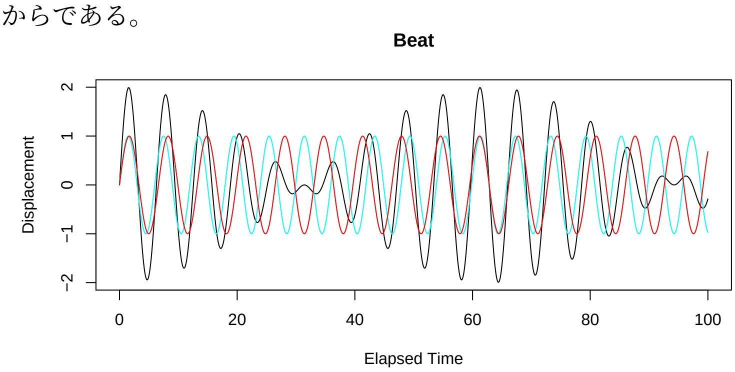


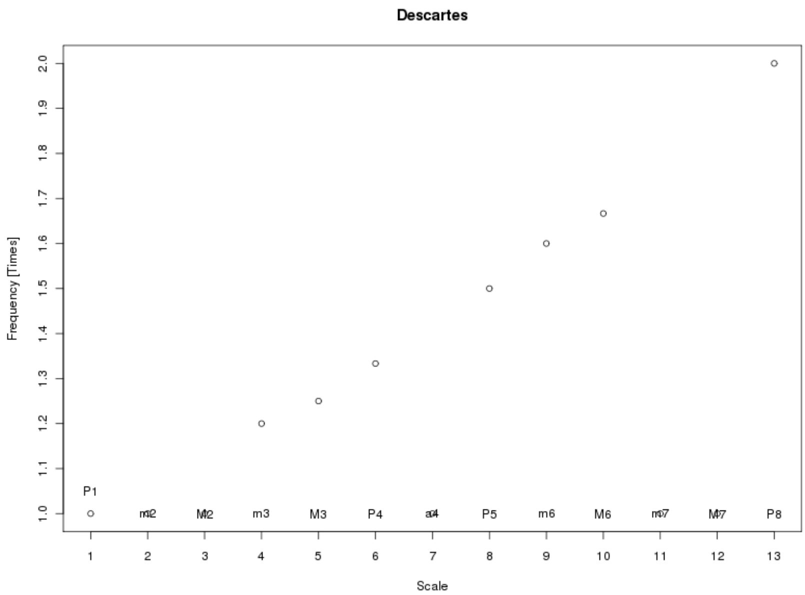

図 8: うなり

$$\begin{aligned} & \sin(1.01t) + \sin(0.99t) \\ = & \sin(t + 0.01t) + \sin(t - 0.01t) \\ = & \sin(t)\cos(0.01t) + \cos(t)\sin(0.01t) + \sin(t)\cos(0.01t) - \cos(t)\sin(0.01t) \\ = & 2\cos(0.01t) \times \sin(t) \end{aligned}$$

$|2\cos(0.01t)|$ を振幅だと思うと、波 $\sin t$ の振幅が時間的に変化すると考えることができる。

# 5　純正律？

基音に対して、3/2 など、いくつかの有理数比の音程を用いる。



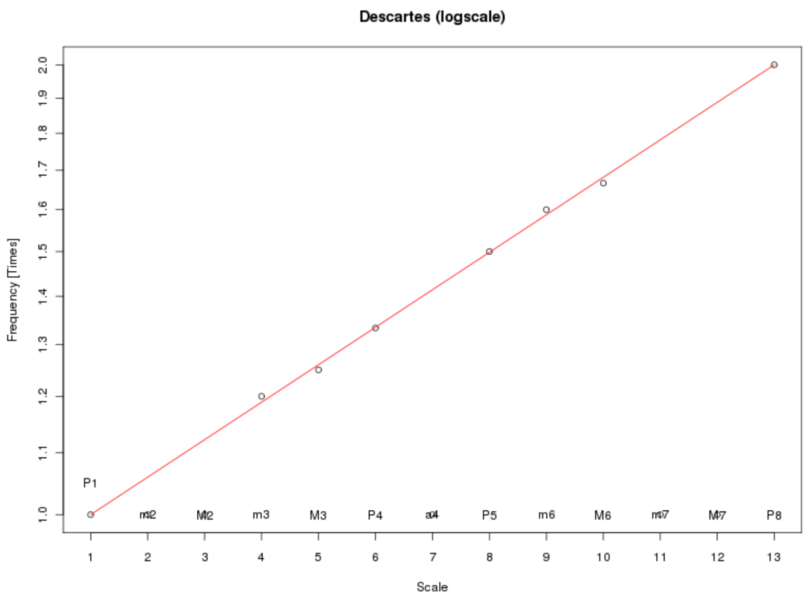




図 10: 純正律

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| m3 | と | P1 | の比率 | $\frac{6}{5} = \frac{16}{15} \times \frac{9}{8}$ | 全音階的半音×大全音 |
| P5 | と | P4 | の比率 | $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ | 大全音 |
| P8 | と | M6 | の比率 | $2 \div \frac{5}{3} = \frac{6}{5} = \frac{16}{15} \times \frac{9}{8}$ | 全音階的半音×大全音 |
| M3 | と | m3 | の比率 | $\frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$ | 半音階的半音 |
| P4 | と | M3 | の比率 | $\frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$ | 全音階的半音 |
| m6 | と | P5 | の比率 | $\frac{8}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{16}{15}$ | 全音階的半音 |
| M6 | と | m6 | の比率 | $\frac{5}{3} \div \frac{8}{5} = \frac{25}{24}$ | 半音階的半音 |
| P4 | と | m3 | の比率 | $\frac{4}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{10}{9}$ | 小全音 (= 半音階的半音×全音階的半音) |
| M6 | と | P5 | の比率 | $\frac{5}{3} \div \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$ | 小全音 (= 半音階的半音×全音階的半音) |

二つの半音と大全音の 3 つの組み合わせで上の比率のすべてを表せる。逆に、これら 3 つは互いに互いを表せない。たとえば、大全音と小全音 (二つの半音) との比率は $\frac{81}{80}$ となる。この違いはシントニックコンマと呼ばれている。