双曲関数

1　復習 (じゃないかも)

1.1　マクローリン展開 (テイラー展開)

ある関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次のような無限級数である。ここでは、収束半径とかは気にしない。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots \\ &= f(0) + \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \end{aligned} \quad (1)$$

- 練習問題
  次の関数をマクローリン展開せよ。ここで、$e^0 = 1, \sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ であるので、簡単になることを予想してから行いなさい。

  1. $e^x =$
  2. $\cos x =$
  3. $\sin x =$

1.2　オイラーの公式

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ をオイラーの公式という。

- 練習問題

  1. $e^{i\frac{\pi}{3}}$ を複素平面上にプロットせよ。右側の余白を用いよ。
  2. 上のマクローリン展開と関連付けて関係式を説明せよ。
  3. $\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$ を説明せよ。
  4. 加法定理 $\sin\alpha + \beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ を $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta}$ を用いて説明せよ。
  5. $\sin\theta$ を $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, を用いて表せ。

2 双曲関数

2.1 定義

双曲関数を次のように定義する。

$$\begin{array}{ll} \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \mathrm{cosech}\ x \equiv \frac{1}{\sinh x} \\ \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \mathrm{sech}\ x \equiv \frac{1}{\cosh x} \\ \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \mathrm{coth} x \equiv \frac{1}{\tanh x} \end{array}$$

- 練習問題

  1. $\sin ix$, $\cos ix$ を求めよ。

  2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ を求めよ。

  3. $\sinh x$, $\cosh x$ をマクローリン展開せよ。

  4. $\frac{d}{dx} \sinh x$, $\frac{d}{dx} \cosh x$ を計算せよ。

  5. e^x を $\sinh x, \cosh x$ を用いて表せ。

  6. $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \times e^\beta$ を用いて $\sinh \alpha + \beta$ についての加法定理を示せ。

  7. $\sinh x$, $\cosh x, \tanh x$ の概形を描け。