11章 転がり運動, 角運動量, トルク

---

§11.1 転がり運動

- 「純粋な転がり運動」: 滑らない床を滑る円柱
  - 円柱の接触部分は停止している。($v_c = R\omega$)
  - 運動エネルギー = 並進運動の分 ($\frac{1}{2}Mv_c^2$) +回転運動の分 ($\frac{1}{2}I\omega^2$)

---

§11.2 ベクトル積

- ベクトル積 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{C}$ の大きさ : $|AB\sin\theta|$
$\boldsymbol{C}$ の　向き : $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ にネジを回した時にネジの進む向き
- ベクトル積の性質
  - 演算の法則

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} &= 0 \\ \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

  - 単位ベクトルについて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} &= \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} &= \boldsymbol{j}\end{aligned}$$

  - 行列式を用いた表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

  - 外積の微分

$$\frac{d\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

§11.3 運動方程式と角運動量

- トルク $\boldsymbol{\tau}$ の定義, 角運動量 $\boldsymbol{L}$ の定義

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

- 運動方程式 $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ からの導出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} \\ &= \frac{d(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})}{dt} \\ &= = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \end{aligned}$$

※ [注意] 運動量ベクトルと速度ベクトルは平行なので $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = 0$ となる。

---

§11.5 角運動量の保存相互作用する物体1,2 の運動方程式から回転の運動方程式を求める。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{21} &= \boldsymbol{r}_1 \times \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} &= \boldsymbol{r}_2 \times \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_2 \end{aligned}$$

両者を足し算する。

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{21} = \frac{d\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2}{dt}$$

※ 物体 2 から物体 1 への変位ベクトル $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ が力と平行
物体を結ぶ線に力が沿っている
→角運動量の合計 $(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)$ は保存する。

---

§11.6 歳差運動

コマの運動では、トルクの向きに角運動量を増やすように回転軸の向きが変化する。

---

§ ※ その他の注

より正確には、慣性モーメントはテンソル (3×3 の行列) で与えられる。角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と角運動量 $\boldsymbol{L}$ は次のように結びつけられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= I\boldsymbol{\omega} \\ \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形代数を学んでいれば、I についての様々な興味深い性質がわかる。