最短力学

桜美林大学 森 厚

平成 29 年 5 月 1 日

目 次

1　はじめに

力学を勉強すると果てしなく感じることもある。しかし、ある程度学習して振り返ってみると、むしろ大事なところは少数で、様々な問題はその応用であることに気づく。一般的な力学の講義が森の中をゆっくり歩いて進むようなものであるとすると、後で振り返ることは森の全体像や名勝を思い返すことに対応しているように思う。もしもこの対応がいいとしたら、力学を勉強する際に地図となるべきものがあったら便利なはずだととも思う。この冊子はその地図に相当する。
これを書くに当たって、次のような決まりを自分の中で設けた。

1. 20 ページを越えないこと

   あまりに長いと全体を見渡す地図としての役割は果たさない。

2. 簡潔にすること

   長い説明はしない。

3. 数式の扱いはできるだけ詳細にすること

   式の変形は簡潔に、しかし、変形を追うことはできるように記述する。そうでないと分かった気分になれないだろう。

この時点で既に 2 ページ目の半ばである。なお、前提知識としては物理学概論のテキストと、いくつかの数学的知識を想定している。

2　運動の法則

ニュートンは次の三つの**運動の法則**を打ち立てた。これらが直感と一致することは各自の中で確かめておきたい。

- 第一法則 (**慣性の法則**)

  物体に力が作用していなければ、その物体は静止し続けるか、あるいは、等速直線運動を続ける。

- 第二法則 (**運動方程式**)

  物体に力が作用するとき、その物体の加速度の大きさは加えた力の大きさに**比例**し、質量に**反比例**する。加速度の向きは力の向き一致する。

- 第三法則 (**作用反作用の法則**)

  一つの物体 A が他の物体 B に力を及ぼすとき、B も A に力を及ぼす。これらの力は、大きさが同じで向きが逆である。

このうち、第二法則は次のような**微分方程式**で表すことができる。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

ここで、m は物体の質量、$\boldsymbol{r}$ は物体の位置、$\boldsymbol{F}$ は物体に作用する力である。$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}$ は共にベクトル量である。力と現時点での位置と速度が与えられているとすると、この微分方程式を積分すること

ができて、ちょっと時間が経った後の物体の位置や速度を決めることができる。一方、力は、物体相互の位置や速度で決まるので、現在よりもちょっと時間が経った後の物体の位置や速度が決まれば力も決めることができる。すると、さらに運動方程式を積分することで、もうちょっと後の時刻の位置と速度を決められる。このように、運動方程式は未来を予測する能力を秘めている。

3 運動の積分

これからしばらくは、運動方程式を数学的に扱ってみる。

3.1 運動量と力積

運動方程式 (1) を時刻 t について積分してみる。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}dt &= \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}dt \\ \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt &= \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}dt \\ \left[m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}dt \end{aligned} \tag{2}$$

左辺の $m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は質量と速度の積で表されるもので**運動量**という。左辺全体では、時刻 t_0 から t_1 の間の運動量の増加分を表している。右辺はその時刻の間に作用する力を時間で積分したもので、これを**力積**と呼んでいる。力積がゼロであるならば運動量の時間変化は無い。この様な性質は**運動量保存則** (あるいは運動量保存の法則) という。

運動方程式は未来を予測する能力を秘めている。しかし、実際には積分という操作があるためにそれが困難である。一般的な性質として、何らかの形で積分が実行可能であるならば、それは未来を予測する上で大変便利な性質となる。式 (2) で表される積分はその例であり、その意味でとてもありがたいものである。通常の積分の手続きに比べて、状況によっては積分した結果である力積を求めることが容易であることもある。例えばゼロであったり、後ほど扱う**撃力近似**を使える場合がそうである。そして、力積がわかってしまえば、運動量の変化分がわかり、積分の手続きを 1 回パスできる。

だが、もう一つ重要な応用がある。例えば二つの物体 1,2(それぞれ質量 m_1, m_2、位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$) があって、**相互作用**している (物体間に力が作用していることをこう表現する) ことを考えよう。物体 1 が物体 2 に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$、物体 2 が物体 1 に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{21}$ とすると、式 (2) に相当するものは次のようになる。なお考えている系内で作用する力は**内力**と呼ばれている。

$$\begin{aligned} \left[m_1\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_{21}dt \\ \left[m_2\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_{12}dt \end{aligned}$$

辺々足し合わせると次式を得る。

$$\left[m_1\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21}dt = 0 \tag{3}$$

ここで作用反作用の法則から $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ となることを用いた。この関係をまとめて表現すると、外部から作用する力 (**外力**) がなければ、作用反作用の法則が成り立つために、運動量の合計 $m_1\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$ が**保存**する (時間的に一定である)。3 つ以上の物体についても話を拡張できる。外力が作用していなければ

$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

は時間変化しない。この様な性質も**運動量保存則** (あるいは運動量保存の法則) という。

3.2 力学的エネルギー

運動方程式 (1) を物体の位置 $\boldsymbol{r}$ について積分してみる。物体は時刻 t_0 で位置 $\boldsymbol{r_0}$ にあり、その後移動して、時刻 t_1 で位置 $\boldsymbol{r_1}$ に到達するとして考える。とは言っても、加速度もベクトル量だし、位置もベクトルとして表されている。ベクトルをベクトルで積分することは考えにくいので、ここでは**内積** (**スカラー積**ともいう) をとって積分する。$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$、$d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ とすると、$\int \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r} = \int a_x dx + \int a_y dy + \int a_z dz$ とする。

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
\int_{t_0}^{t_1} m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt &= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \boldsymbol{v}^2 dt &= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
\left[\frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2\right]_{t_0}^{t_1} &= \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad (4)
\end{aligned}$$

1 行目から 2 行目へ移るとき、左辺では変数変換を行っている。2 行目から 3 行目への移行はよくやる方法なので覚えておきたい。3 行目では同じベクトルの内積 (例えば $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$) は、大きさの 2 乗になるためにこのような表記 ($\boldsymbol{v}^2$ を用いている。また、$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は速度 $\boldsymbol{v}$ である。最終的に現れた $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ は**運動エネルギー**と呼ばれている。また右辺は力を座標で積分したもので、**仕事**と呼ばれている。力と微小な**変位** $d\boldsymbol{r}$ との内積をとることで、力の変位に沿った方向成分を変位で積分したものになっている。運動エネルギーの増加分は外力 $\boldsymbol{F}$ のした仕事に等しい。

ここで、力 $\boldsymbol{F}$ が**保存力**である場合を考えよう。保存力の定義の方法はいくつかあるだろう。ここでは、単刀直入に次のような関数 $U(\boldsymbol{r})$ が存在するような力 $\boldsymbol{F}$ を保存力ということにする。

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \qquad (5)$$

ここに現れた記号 ∇(**ナブラ**) は、**ベクトル解析**でいう**勾配** (あるいは**グラディエント**) に対応する。$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ と定義される。これはベクトル量なので向きと大きさがある。向きはもっとも U の値が大きくなる方向である。大きさは値がもっとも大きくなる方向に沿って $\boldsymbol{r}$ を変化させたときの U の変化率である。また、U は**位置エネルギー**とか**ポテンシャル**とか呼ばれるものである。このように考えた保存力は特殊な力と思われがちだ。しかし、実際には重要であり、かつ適用範囲が広い。

保存力の場合に仕事がどう表されるか考えてみよう。

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \nabla U \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdot(dx,dy,dz) \\
&= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} dU \\
&= -[U]_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} = -(U(\boldsymbol{r}_1)-U(\boldsymbol{r}_0)) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

2 行目から 3 行目への移行は難しいかもしれない。ベクトル量 ∇U と物体の移動経路に沿った位置の変化量 $d\boldsymbol{r}$ との内積は、移動経路に沿った U の変化 $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ となるのである。この結果 (6) はとても興味深い。仕事は力を変位方向に沿って積分したものであるので、当然、どのような経路で移動したかを考える必要がある。ところが、この結果が示しているところは、保存力の場合には経路によらず最初の位置 ($\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$) と最後の位置 ($\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$) だけで決まってしまうということだ。これが非常に重要な性質である。

上記の導出での 3 行目への移行については、次のように考えた方が理解しやすいかもしれない。ここでは $U(\boldsymbol{r})$ を t の関数であると考えてみよう。U は $\boldsymbol{r}$ だけの関数であるのにこれを t の関数と考えることができるのは、物体の位置 $\boldsymbol{r}$ を t の関数として $\boldsymbol{r}(t)$ と表すことができるからである。

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_{t_0}^{t_1}\nabla U\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1}\frac{dU(\ \boldsymbol{r}(t)\ )}{dt}dt \\
&= -[U(\ \boldsymbol{r}(t)\ )]_{t_0}^{t_1} = -(U(\ \boldsymbol{r}(t_0)\ ) - U(\ \boldsymbol{r}(t_1)\ )) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ここで 2 行目から 3 行目への移行については微分操作の**チェイン・ルール** ($\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$) を思い出せばよい。

式 (4) と式 (7) とを組み合わせてみよう。

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right]_{t_0}^{t_1} &= -[U(\ \boldsymbol{r}(t)\ )]_{t_0}^{t_1} \\
\left[\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\ \boldsymbol{r}(t)\ )\right]_{t_0}^{t_1} &= 0 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

運動エネルギーと位置エネルギーの合計を**力学的エネルギー**と呼んでいる。保存力だけが作用する場合には、力学的エネルギーは保存する。これを**力学的エネルギー保存則**あるいは力学的エネルギー保存の法則と呼んでいる。保存力の場合には、いちいち積分しなくても、運動に関する情報を得ることができるのである。

3.3 角運動量

運動方程式に位置ベクトルの**外積** (**ベクトル積**ともいう) を作用させる。ここで、外積とは、二つのベクトルの間の演算であり、次のように定義される。任意のベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &\equiv (a_x, a_y, a_z) \\
\boldsymbol{B} &\equiv (b_x, b_y, b_z)
\end{aligned}
$$

に対して、

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (\ a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x\ ) \qquad (9)
$$

となる。このベクトルの大きさは、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とが作る平行四辺形の面積に等しく、向きは、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ とに垂直で、$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ回したときに右ネジが進む向きである。

話を戻して運動方程式の左側から $\boldsymbol{r}\times$ を作用させる。そして、左辺についていくつかのトリッキーな変形を行う。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}\times m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\ m\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\ \frac{d}{dt}\left(m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、スカラー量 m は定数なのでどこに置いても問題ない。2 行目から 3 行目への移行では、同じベクトル同士の外積が恒等的にゼロであることを用いている。左辺の位置ベクトルと運動量との外積 $m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は**角運動量**と呼ばれている。また、右辺の $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ は**トルク** (あるいは**力のモーメント**) と呼ばれている。

このような物理量は、原点がどこにあってもいいことを考えるとあまり意味のない物理量ではないか、と思うかもしれない。実際、原点をどこに置くかでトルクが生じたり生じなかったり、また、角運動量が値を持ったり持たなかったりする。では、どうしてこのような物理量を考える必要があるのだろうか。一つには、太陽のような非常に大きな質量を持った物体による**万有引力**を考えることが多く、自然な原点があるということもある。そして、もう一つ大切なのは**運動量**と同様な保存則 (**角運動量保存則**あるいは角運動量保存の法則) が成り立つことである。これを導くために、運動量保存則の場合と同様に、二つの物体に対する角運動量の式を立ててみる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m_1\boldsymbol{r}_1\times\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\right) &= \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{21} \\ \frac{d}{dt}\left(m_2\boldsymbol{r}_2\times\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right) &= \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{12} \end{aligned}$$

辺々足し合わせると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m_1\boldsymbol{r}_1\times\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}+m_2\boldsymbol{r}_2\times\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right) &= \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{12} \\ &= (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{F}_{21} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで作用反作用の法則 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$ を用いている。この式のポイントは、右辺が原点に依らない表現になっていることである。実際、$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ は物体 2 の位置から見た物体 1 の位置を表す位置ベクトルになっていて、$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ を表すときの原点には無関係である。もう一つのポイントは、力 $\boldsymbol{F}_{12}$(あるいは $\boldsymbol{F}_{21}$) が物体 1 と物体 2 を結ぶ直線に沿っているならば、$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{F}_{21}=0$ となり、角運動量の合計の時間変化がゼロになるということである。このような性質をもった力、すなわち物体 1 が物体 2 に及ぼす力が、物体 1 と物体 2 を結ぶ線に沿って作用するような性質を持った力は**中心力**と呼ばれている。物体間の相互作用が中心力であるならば、角運動量の合計は保存する。この性質は、3 つ以上の物体にも適用できる。

4 具体的な力と運動

ここまでの成果を基に、具体的な力を想定してどのような運動が生じるか考えてみよう。

4.1 等速直線運動

力が作用してない場合、加速度はゼロである。そこで速度 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}_0$ が一定となる。そこで、簡単に積分もできる。初期 $(t = 0)$ の位置を $\boldsymbol{r}_0$ とすると次のようになる。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{12}$$

このような運動を**等速直線運動**という。ところで、このような運動が実現するかは微妙である。なぜならこの世の中に全く力を受けていない物体などないからである。

4.2 重力による運動

重力は地球の**万有引力**と地球の自転によるによって生じる**遠心力**との合力である。その性質を一般的に考えることは難しい。しかし、人間は地球よりもはるかに小さい。また、我々が観測する物体の運動は、我々の体のサイズとそう違わない。これらの理由で、重力は考えている範囲で一定であるとすることが多い。

重力

向き : 鉛直下向き

大きさ: mg

ここで、m は物体の質量、g は**重力加速度**で定数であるとする。$g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$ とすることが多い。重力の場合も含めて、物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ が一定である場合について考えると、運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

は簡単に積分できる。初期 $(t = 0)$ の速度 $\boldsymbol{v}_0$、位置 $\boldsymbol{r}_0$ が与えられたとすると任意の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 $\boldsymbol{r}$ 次のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}t + \boldsymbol{v}_0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{F}}{m}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{14}$$

一定である力 $\boldsymbol{F}$ の例として、特に重力を考える場合には次のようになる。

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{16}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{g}$ は鉛直下向きで大きさ g であるとする。

力が一定である場合には**ポテンシャル** U を容易に導入することができる。$\boldsymbol{F} = -\nabla U$ であることから、$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ (F_x などは定数) とすると次のようになる。

$$U(x, y, z) = -F_x x - F_y y - F_z z \tag{17}$$

ここで、x などは位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の各成分である。力学的エネルギー保存の法則が成り立っているか確かめてみる。簡単のために z 軸を力に沿う方向にして $F_x = F_y = 0$ となるようにしても一般性を失わない。

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U = \frac{m}{2}\left(\frac{\boldsymbol{F}}{m}t + \boldsymbol{v}_0\right)^2 - F_x x - F_y y - F_z z$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m}{2}\left(v_{0x}^2+v_{0y}^2+\left(\frac{F_z}{m}t+v_{0z}\right)^2\right)-F_z z \\
&= \frac{m}{2}\left(v_{0x}^2+v_{0y}^2+v_{0z}^2+\frac{F_z^2}{m^2}t^2+\frac{2F_z v_{0z}}{m}t\right)-F_z\left(\frac{F_z}{2m}t^2+v_{0z}t+z_0\right) \\
&= \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_0^2-F_z z_0
\end{aligned}
$$

任意の時刻の力学的エネルギーは初期の力学的エネルギーに等しいことが確かめられた。重力の場合、鉛直上向きに z 軸をとると、$F_z=-mg$ であるので力学的エネルギー保存の法則は次のように表される。

$$
\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+mgz = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2+mgz_0 \tag{18}
$$

4.3 万有引力による等速円運動

二つの物体 1(質量 m_1)、物体 2(質量 m_2) の間に作用する**万有引力**とは次のような力である。

万有引力

向き ： 互いに引き合う向き

大きさ: $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

ここで、$G=6.67300\times10^{-11}[\ \mathrm{m^3/kg\ s^2}]$ は**万有引力定数**と呼ばれる定数である。また r は物体間の距離である。万有引力が作用している状況下での一般的な運動を考えるのはそれほど簡単ではない。

ここでは、一方の質量が極めて大きいためにその物体は動かず、もう一つの物体の質量は相対的に軽いために、軽い方だけが運動すると考えてみよう。ちょうど太陽系のような場合に該当する。また、軽い方の物体は**等速円運動**をすると初めから仮定してしまうことにする。すなわち、質量が大きい物体 (質量 M) の位置を原点として、質量の軽い方の物体 (質量 m) の位置が次のように表されるとする。

$$
\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{19}
$$

r は軌道の半径である。ω は**角速度** (あるいは**角振動数**) と呼ばれていて、単位時間に何ラジアン進むかを表したものである。これを 1 回微分すれば速度 $\boldsymbol{v}$、もう一度微分すると加速度 $\boldsymbol{a}$ を得る。

$$
\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{20}
$$

$$
\boldsymbol{a}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{21}
$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$ と表されることに注目しよう。これは等速円運動の場合の重要な性質である。加速度が得られたので運動方程式を考えよう。万有引力の向きは中心向き、加速度の向きも中心向きであるので、向きについては考える必要がない。大きさだけについて考える。すると、次のような式が成り立つ。ただし、$r=|\boldsymbol{r}|$ である。

$$
m\omega^2 r = G\frac{Mm}{r^2} \tag{22}
$$

$$
\omega^2 r^3 = GM\ (=\ const.) \tag{23}
$$

この関係は**ケプラーの法則の第三法則**と呼ばれている。

一般的な運動については保存量を考えるとよい。万有引力は中心力なので**角運動量** $\boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が保存する。これは角運動量に対応した**面積速度**が一定であるという**ケプラーの法則の第二法則**と対応する。(ちなみに**ケプラーの法則の第一法則**は、惑星の軌道が太陽を焦点とする楕円軌道であることを示したものである。) また、万有引力の**ポテンシャル**は $U(r) = -G\frac{Mm}{r}$ と書けるので、中心の星の周りの物体の運動では、**力学的エネルギー** $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$ を保存した運動となる。エネルギーの保存を考えると、ある時刻のある物体について考えたとき、惑星中心からの距離 r と、その場所での速度がわかれば、その物体が惑星から無限遠まで遠ざかることができるかどうかを容易に予言することができる。無限遠でもその物体が速度を持つためには $r \to \infty$ (ポテンシャルがゼロ) で力学的エネルギー (運動エネルギー) が正でなければならないことから、

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \quad > \quad 0 \tag{24}$$

がその条件となる。この関係は、しばしば惑星表面での**重力加速度** g_s を用いて表される。自転の効果を除けば、半径 R の惑星星表面で $g_s = G\frac{M}{R^2}$ と表される。これを (24) に当てはめると、惑星表面で次の条件が満たされれば惑星から無限遠まで到達することができる。

$$v \quad > \quad \sqrt{2g_sR} \tag{25}$$

この速さは**脱出速度** (あるいは**第二宇宙速度**) と呼ばれ、地球の場合にはおおよそ 11[km/s] である。

4.4 バネによる単振動

バネを引っ張ったり縮めたりすると元に戻そうとする力 (**復元力**) が作用する。もっとも単純なモデルでは、復元力は元の長さ (自然長) からのずれ (変位) に比例すると見なすことができるであろう。

バネによる復元力

向き : 自然長に戻ろうとする向き

大きさ: $-kx$

変位 x に比例する。k は比例定数でバネ定数と呼ばれている。負号は変位に対して反対向きであることを表している。

バネによる復元力が変位に比例する性質は**フックの法則**と呼ばれている。

バネについた質量 m の物体の 1 次元の運動を考える。運動が x 方向だけであったとすると運動方程式は次のようになる。

$$-kx \quad = \quad m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{26}$$

これは最も典型的な線形の 2 階の**微分方程式**である。階数が 2 であるので、初期値として二つの値を与える必要がある。そこで、一般的な解は 2 つの**解の自由度**がある。(自由度という言葉は場合によって使われ方が違うので注意する。) この場合には次の二通りで解を書くことが多い。どちらの解にも自由度に対応して未知数が二つ (それぞれ $A \cdot B$ と $A \cdot \phi$ が) 含まれている。どちらも解であることは代入して容易に確かめられるし、三角関数の合成を考えるとどちらも同じものであることが容易にわかる。

$$x(t) \quad = \quad A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{27}$$

$$x(t) \quad = \quad A\sin(\omega t + \phi_0) \tag{28}$$

ここで、$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$(複号についてはどちらか。) である。三角関数の**引数** (「ひきすう」と読む。sin などの右側に書く部分) は**位相**と呼ばれる。ϕ_0 は $t = 0$ での位相なので**初期位相**と呼ばれる。A, B は**振幅**と呼ばれる。また、このような運動を**単振動** (あるいは**調和振動**) という。

バネによる復元力は保存力であるので**ポテンシャル** $U(x)$ が存在する。$-kx = -\frac{\partial U}{\partial x}$ であるので、両辺を積分すると次のようになる。ただし積分定数はゼロとした。

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{29}$$

これを用いて単振動の場合の**力学的エネルギー保存則**を考えてみよう。

$$K(v(t)) + U(x(t)) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2$$

U が習慣としてポテンシャルを表すように、K は習慣として運動エネルギーを表す。式 (28) の表式を代入すると次のようになり、力学的エネルギーが保存されることがわかる。

$$\begin{aligned} K(v(t)) + U(x(t)) &= \frac{1}{2}m(\omega A\cos(\omega t + \phi_0))^2 + \frac{1}{2}k(A\sin(\omega t + \phi_0))^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \tag{30}$$

4.5 速度に比例した摩擦力がある場合の運動

摩擦力は**保存力**ではない。しかし、実用上、よく用いられる。

床面や斜面に置かれた物体が面に沿って直線上を移動する場合には、近似的に摩擦力は一定であると考えられる。そこで、重力による運動 (4.2 節) と同様の扱い方ができるのでここでは扱わない。ここでは、速度に比例した摩擦力が生じる場合で 1 次元的な運動を考えてみよう。これらの仮定により、運動方程式は次のように書ける。

$$-kv = m\frac{dv}{dt} \tag{31}$$

$v > 0$ の時、摩擦力は速度を減らす向きに作用する。そこで摩擦力は正の比例定数 k を用いて $-kv$ と書ける。加速度は x ではなく速度 $v = \frac{dx}{dt}$ を用いて書いてある。式 (31) も典型的な**微分方程式**である。1 階であるので**解の自由度**は 1 である。一般解が次のように表されることは容易に確かめられる。

$$v = Ae^{-\frac{k}{m}t} \tag{32}$$

$\frac{m}{k}$ は時間の次元を持っており、速度が減衰する際に $1/e$ になる時間を表している。この時間は**緩和時間**と呼ばれている。重力があって速度に比例する摩擦がある場合に同様の運動方程式を解くと、速度は $\frac{mg}{k}$ に漸近する。この値は**終端速度**と呼ばれている。

4.6 衝突

例えばバットでボールを打つ場合、力が作用している時間は極めて短い。時間が短いからといって**力積**がゼロであるかというとそうではない。ボールもバットも**運動量**が変化しているのはその証拠である。衝突のような問題では、力が作用している時間を 0 として、かつ、有限な力積があるようなモデル化を行う。このような近似は**撃力近似**と呼ばれ、ここで述べたような力は**撃力**と呼ばれている。一般に物体の衝突を考える場合には撃力近似が十分いい近似であるという前提で話を進める

ことが多い。撃力近似が有用であるのは、考えている時間が非常に短いために、他の力が作用していたとしても、その力の影響は少なくなり、衝突前後では撃力だけ考えれば良いという点にある。一般に、3 つ以上の物体が同時に 1ヶ所で衝突する問題を考えることは容易ではない。以下では同時に衝突する物体の数は 2 つであるとする。また、問題設定としては、衝突前の速度が決まっている時に、衝突後の速度を決定する、という問題を考える。

1 次元問題

物体 1 と物体 2 を考え、物理量を添字で区別する。また、衝突後の物理量には' (日本語では「ダッシュ」、英語では prime と読んでいる。) をつけて区別することにする。また、記号はこれまで用いたものと同様である。運動量保存則、エネルギー保存則から次の式が成り立つ。

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{33}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{34}$$

未知数は二つ (v_1, v_2) で方程式の数も二つなのでこの問題は解ける。

2 次元問題

x 方向、y 方向について考え、それぞれの方向についての成分を添字をつけて表すことにする。

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \tag{35}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \tag{36}$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2) \tag{37}$$

未知数は $v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$ の 4 つになる。ところが方程式は 3 本しかない。従ってこの問題を解くためにはもう一つ条件を与える必要がある。これは、衝突後の物体の跳ね方に対応して自由度が 1 つあることに対応している。例えば、どちらかの物体がある方向に跳ねるとわかっていれば、4 つの未知数はすべて決まることになる。

3 次元問題

同様に考えると、未知数の数は二つ増えて、運動量の式は一つ増えるだけである。衝突後の速度に二つの自由度を与えることができ、跳ねる方向の自由度が増えることと対応すると考えられる。

ここまでは衝突でエネルギーが失われないことを前提として話を進めてきた。このような衝突は**弾性衝突**という。ところが現実問題としては衝突に際してエネルギーが失われることが多い (**非弾性衝突**)。非弾性衝突で失われるエネルギーの量は二つの物体の物質の性質によってその比率が決まっている考えるのは、一つの自然なモデル化である。ただし、気をつけなければならないのは、相対的に等速直線運動する座標系で観察するとエネルギーの量が変わってしまうことである。そこで、衝突前の運動量の合計がゼロであるような座標系 (この様な座標系は**重心系**と呼ばれている。) を考える。重心系は衝突の問題を考えると一通りに決まる。そして重心系では二つの物体は互いに正面から衝突し、互いに逆向きに遠ざかる。1 次元運動の場合には、重心系での運動エネルギーの散逸率に対応して相対速度の減少率 (**跳ね返り係数**) を決めることができる。跳ね返り係数は座標変換によらずに定義することができるのでこの様なモデル化をした際には便利に使われている。

5 大きさがある物体の運動

これまで考えてきた物体の運動について、大きさは無視している。大きさを無視するということの意味は、物体の変形や回転は考慮しないということでもある。このように物体をモデル化したものは**質点**と呼ばれている。大きさがある物体についても変形しないというモデル化がよく行われる。このような物体は、硬いという意味で**剛体**と呼ばれている。ここでは剛体について扱う。ただし、その準備として、複数の質点で構成される**質点系**から話を始める。

5.1 質量系の力学

n 個の質点 (質点 1〜質点 n) を考える。記号の使われ方はこれまでと同じとし、添字で質点を区別する。質点 i に作用する力を、質点系以外から受ける力 $\boldsymbol{F}_i$(これは**外力**と呼ばれる。) と、質点系内の質点 j から受ける力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ とに分割して考える。

$$\boldsymbol{F}_i + \sum_{j,j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \tag{38}$$

これをすべての i について足し合わせてみよう。

$$\begin{aligned} \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j,j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} &= \sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \\ \sum_i \boldsymbol{F}_i &= \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \end{aligned} \tag{39}$$

左辺が簡単になったのは作用反作用の法則による。また、右辺では m_i が定数であることを使った。ここで、**質量中心** (あるいは**重心**)$\boldsymbol{r}_G$ を全体の質量 $M \equiv \sum_i m_i$ を用いて次のように定義する。

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \tag{40}$$

すると式 (39) は次のように書き表される。

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = M \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} \tag{41}$$

質点系を考える場合には質量中心を考えるのが便利である。外力を合計したものが、「全質量が質量中心に集中した質点」に作用していると考えれば質点の問題と同様になってしまうからである。

同様に角運動量について考えてみる。式 (38) に左側から $\boldsymbol{r}_i$ をかけて i について和をとる。

$$\begin{aligned} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j,j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} \\ \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{j,j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} \right) &= \frac{d}{dt} \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

ここで作用反作用の法則から $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji}$ となり、内力が**中心力**であれば、これらはゼロになる。従って次の式が成り立つ。

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right) \tag{42}$$

各質点でのトルクの合計が全角運動量の時間変化をもたらす。

位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ を質量中心 $\boldsymbol{r}_G$ とそこからのずれ $\boldsymbol{r}'_i \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_G$ で表してみよう。

$$
\begin{aligned}
\sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G) \times \boldsymbol{F}_i &= \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G) \times m_i \frac{d^2(\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G)}{dt^2} \\
\sum_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i) + \boldsymbol{r}_G \times \sum_i \boldsymbol{F}_i &= \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}'_i}{dt^2} + \boldsymbol{r}_G \times \sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt} + \boldsymbol{r}_G \times M \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} \\
\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i &= \frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt} \qquad (43)
\end{aligned}
$$

第 1 式から第 2 式へは $\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = 0$ を用いた。第 3 式から第 4 式へは重心に関する運動方程式 (41) を用いた。この結果 (43) は、重心に対する各質点の相対運動についての情報を与えている。

5.2 剛体の運動

質量中心の運動については、式 (41) のように質点に作用する力の合計を考えれば質点と同様に扱えることがわかった。また、各質点の重心に対する相対的な位置 $\boldsymbol{r}'$ は式 (43) で扱えることがわかった。以下ではこれらの結果を基に、剛体の運動を考える。剛体の特徴は二つある。

特徴 1 変形しないこと

一つ目の特徴は変形しないことにある。これは、質点系内の質点の位置が質量中心に対して相対的に変化しないことである。このような場合の質量中心周りの運動は、物体の質量中心を通るある軸の周りの回転運動として表される。ただし、その軸の向きや回転の速さが時間的に変化することは許される。その運動の様子は、回転軸に平行なベクトルで、大きさが 2π/(周期) で表されるようなベクトル $\boldsymbol{\omega}$(これは**角速度ベクトル**と呼ばれる。) を用いると次のように**外積**で表される。

$$
\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \qquad (44)
$$

ここで気をつけたいのは角速度ベクトルの向きである。この定義からわかるように回転運動について右ネジの向きに $\boldsymbol{\omega}$ の向きを定めている。

特徴 2 連続体であること

剛体のもう一つの特徴は連続体であることである。質点系では質点に番号をつけて表し合計する操作を行っていた。連続体の場合には、位置の関数として**密度** $\rho(x, y, z)$ を与え、体積要素 $dx\,dy\,dz$ との積 $\rho\,dx\,dy\,dz$ で物体中の微小な質量を考える。すると、これが質点系の各質点に対応する。合計する操作は積分に対応する。

積分するに当たって、慣性系で記述した物体の座標について積分することは合理的ではない。剛体内の特定の点が運動に伴って座標が変化するのは煩わしい。そこで、以下では物体に固定された座標系で質量中心を原点とするような座標系を採用する。このように表された位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ と表し、慣性系からみた位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と区別することにする。

以上を踏まえて、質点系の力学を剛体の場合について書き直してみる。まず、質量中心の定義式 (40) についてはは次のようにかける。積分は慣性系について行い、積分範囲は物体全体に渡る。

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{M}\iiint \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\;dx\,dy\,dz \tag{45}$$

次に重心 $\boldsymbol{r}_G$ についての運動方程式 (41) は次のように書ける。

$$\iiint \boldsymbol{F}\;dx\,dy\,dz = M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} \tag{46}$$

今度は重心周りの角運動量についての式 (43) を考えてみよう。積分は剛体に固定された座標系で行う。表記が煩わしくなるので、$\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ とはせず、$\boldsymbol{r}' = (x, y, z)$ と表すことにする。

$$\begin{aligned}\iiint \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}\;dx\,dy\,dz &= \frac{d}{dt}\iiint \boldsymbol{r}'\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\rho\;dx\,dy\,dz\\ &= \frac{d}{dt}\iiint \boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\,\rho\;dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{47}$$

ここで、速度ベクトルを角速度ベクトルと位置ベクトルを用いて表す式 (44) を用いた。被積分関数 $\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$ を成分で表してみよう。添字の x, y, z はそれぞれの方向の成分を表す。

$$\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = \begin{pmatrix} y\,(\omega_x y-\omega_y x)-z\,(\omega_z x-\omega_x z)\\ z\,(\omega_y z-\omega_z y)-x\,(\omega_x y-\omega_y x)\\ x\,(\omega_z x-\omega_x z)-y\,(\omega_y z-\omega_z y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \tag{48}$$

この結果を用いると剛体の回転運動は次のように書き直される。

$$\iiint \boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}\;dx\,dy\,dz = \frac{d}{dt}\boldsymbol{I\omega} \tag{49}$$

$\boldsymbol{I\omega}$ は角運動量である。$\boldsymbol{I}$ は**慣性モーメント** (**慣性テンソル**) と呼ばれ、次のように定義される。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix} = \iiint \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}\rho\;dx\,dy\,dz \tag{50}$$

なお、運動エネルギーは次のようになる (等式が成り立つことを各自確かめること)。

$$\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\,\rho\;dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\iiint \boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\,\rho\;dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega I\omega} \tag{51}$$

ところで $\boldsymbol{I}$ は $I_{ij} = I_{ji}$ が成り立つ。このような対称性を持った**テンソル**は、適当な直交座標変換によって対角化が可能である。新たな座標 (ξ, η, ζ) に対応する座標軸は**慣性主軸** と呼ばれている。

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & 0 & 0\\ 0 & I_{\eta\eta} & 0\\ 0 & 0 & I_{\zeta\zeta}\end{pmatrix} \tag{52}$$

剛体の運動についてこのように定式化された。しかし、実際の計算はそれほど容易ではない。

慣性系に対して固定された軸について剛体が回転する場合、問題は簡単になる。回転軸上に原点をとり、回転軸に沿った成分だけを考えて、同様の議論を展開し直せばよい。慣性モーメントは 1 成分になり、角速度ベクトルも 1 成分だけ考えればよい。また、その軸の周りのトルク τ が、角運動量の時間変化に等しくなる。慣性モーメント、角運動量、運動エネルギー、角速度の時間変化を表す式は、それぞれ次のように表される。(r は剛体内の各部分の回転軸からの距離である。)

$$I = \iiint \rho r^2 dx\,dy\,dz, \qquad I\omega, \qquad \frac{1}{2}I\omega^2, \qquad \tau = I\frac{d\omega}{dt} \tag{53}$$

6 解析力学

ニュートンが 1687 年にプリンキピアを著してから、アインシュタインが 1905 年に発表した特殊相対性理論によって力学を根本的に見直すことになるまで、力学は進歩が無かったのかというとそうではない。ここまで述べたような形式自身、既に、ニュートン自身の記述よりも洗練されている。あるいは、素人にもわかりやすい。(逆に言ってニュートン自身の記述はわかりにくかった。) ところが、更に整った形式の記述も開発された。そうした形式での力学は**解析力学**という。オイラーやハミルトン、ラグランジュといった名だたる物理学者・数学者が関係している。

6.1 ラグランジュの解析力学

運動エネルギー T と**ポテンシャル** U とを組み合わせて、$L = T - U$ という量を考えよう。この量は**ラグランジアン**と呼ばれている。このラグランジアンは座標 (q_i で表す。) とその時間微分 ($\dot{q}_i$ で表す。) の関数 $L(q_i, \dot{q}_i)$ であるとする。一般には t の関数 $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ であることも考えられる。ここでいくつかの注意がある。まず、座標系についてはどのような座標系を用いてもよい。運動エネルギーの値やポテンシャルの値は、物体の状態や場所によって決まっているので座標系によって決まっている訳では無いからである。ここで使われる q_i は**一般化座標**と呼ばれている。次に添字 i についてである。物体の**運動の自由度**は一般に複数である。それらを表すために添字をつけてある。一般に自由度の数はわからないので、$q_1, q_2 \cdots, q_n$ をまとめて q_i と表している。具体的に計算する時にはその点に気をつける。三つ目は表記についてである。座標 q_i は時間だけの関数 $q_i(t)$ である。時刻が決まれば座標が決まる。その時間変化率は $\frac{dq_i}{dt}$ と表しても良いのであるが、$\dot{q}_i$ と表すのが解析力学の場合の習慣であり、これを**一般化速度**という。最後に T についての注意である。慣性系を想定すると、座標原点の位置をずらしただけでは運動エネルギーの値は変わらないはずである。そこで、T は q_i そのものは含まず、$\dot{q}_i$ の関数である。また、座標軸の向きを逆にしても運動エネルギーの値は変わらないはずであるので、T は $\dot{q}_i$ の 2 乗 (偶数乗) だけを含むはずである。

ハミルトンは次の**ハミルトンの原理**を**運動方程式**に代わる原理として採用できることを示した。

ハミルトンの原理

運動 $(q(t))$ は積分 $\int_{t_1}^{t_2} L\ dt$ を最小にするものが実現する。これを**変分問題**として次のように書く。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\ dt \quad = \quad 0 \tag{54}$$

ただし、積分区間の両端で q_i の値は与えられているとする。

これが何を言っているのか理解することを試みよう。ラグランジアン L は座標やその時間変化で記述されている。これは座標系をどう決めるかによっている。座標系を決めればラグランジアンが $q_i, \dot{q}_i$ でどのように記述されるかが決まる。では決まっていないのは何だろうか。それは $q_i(t)$ の関数形である。時刻によって位置がどのように表されるかはわからない。逆にこれが決まれば運動の様子を記述できることになる。そこで L は q_i が t のどのような関数であるかによって変化してくる。そのような意味で L は「関数 $q_i(t)$」の関数である。関数形によって値が決まる関数 L のようなものは**汎関数**と呼ばれている。ハミルトンの原理 (54) は汎関数 L が最小になるという条件から $q_i(t)$ の関数形が決まり、それが実現する運動であると主張している。

ところで、どうしてこの様な形で記述しようと思ったのだろうか。それを考えるのは物理学の考え方につながる重要な点である。実は、他にも同様に「何かを最大 (あるいは) 最小にする」という

形で表現される物理法則は他にもある。それに倣 (なら)ったということもできる。例えば「光の通り道は到達時間を最短にする経路である」という**フェルマーの原理**がそうである。

話を戻して、極めて抽象的なハミルトンの原理 (54) をより素人がわかりやすいように書き直してみよう。変分問題 (54) を解く方法 (あるいは問題を変分問題として定式化してから解く方法) を**変分法**という。定積分が最小である、という条件から、関数 q_i を少しだけ変化させても L についての定積分は変化しないといえるだろう。これは微分法で極値を求めるときの考え方と同じである。この条件を定式化する。q_i を $q_i + \delta q_i$ に変化させた時の、定積分の値の変化がゼロであるという条件は次のように書き表せる。

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i+\delta q_i, \dot{q}_i+\delta\dot{q}_i, t)\ dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\ dt \sim \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)\ dt \\
&= \sum_i \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\ dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \right]_{t1}^{t2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\ dt \right) \\
&= \sum_i \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\ dt \right) \qquad (55)
\end{aligned}
$$

ここで、時刻 t_1, t_2 での座標は与えられていること ($\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$) を使った。$\delta q_i$ は任意であるので、すべての i について、次の**ラグランジュの運動方程式**を得る。

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (56)
$$

力が運動量の時間変化をもたらすというニュートン力学の運動方程式に対応させて呼び名を作ろう。$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ を (q_i に共役な) **一般化運動量**呼ぶ。また、$\frac{\partial L}{\partial q_i}$ の中に現れるであろう $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ を**一般化力**と呼ぶ。保存量を見つけやすいのも解析力学の特徴である。L の中に q_k が含まれなかったとすると、$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$ となり、すぐに保存量 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ が得られる。こうした q_k は**循環座標**と呼ばれている。

6.2 ラグランジュの運動方程式の応用

ラグランジュの運動方程式を様々な場合に適用してみる。適用方法は考えている座標系で運動エネルギーとポテンシャルを書き表し、ラグランジュの運動方程式に当てはめるだけである。

1. デカルト座標系でポテンシャル U が与えられている場合

   座標軸が直線で互いに直交しているような座標系で表される座標は**デカルト座標**と呼ばれている。デカルト座標は最もよく使われる座標である。

$$
L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x,y,z)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
m\frac{d}{dt}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\
m\frac{d^2}{dt^2}x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (57)
\end{aligned}
$$

   y, z 方向についても同様である。我々がよく勉強した**運動方程式**にたどり着いた。

2. 慣性系に対して初速度ゼロ、加速度 α で等加速度運動する座標系の場合

等加速度運動をする方向に x 軸をとる。すると $U=0$ なので次のようになる。

$$L=T \quad = \quad \frac{m}{2}\left((\dot{x}+\alpha t)^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) \tag{58}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=m\frac{d}{dt}(\dot{x}+\alpha t)=m\frac{d^2x}{dt^2}-m\alpha \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\alpha \end{aligned} \tag{59}$$

現れた $-m\alpha$ は実際には作用していないが、加速度運動する座標で観察したことによって生じる見かけの力である。この様な力は**慣性力**と呼ばれている。

3. 慣性系に対して角速度 ω で回転している座標系 (回転系) の場合

座標原点は一致しているとする。回転軸を z 軸とおくと、慣性系での座標 (x,y,z) と、回転系での座標 (x',y',z') とは次のように関係付けられる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}'\cos\omega t - \dot{y}'\sin\omega t - \omega x'\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t \\ \dot{x}'\sin\omega t + \dot{y}'\cos\omega t + \omega x'\cos\omega t - \omega y'\sin\omega t \\ \dot{z}' \end{pmatrix}$$

するとラグランジアン L は次のようになる。

$$L \quad = \quad T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2+\omega^2(x'^2+y'^2)+2\omega(x'\dot{y}'-\dot{x}'y')\right)$$

ラグランジュの運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'}-\frac{\partial L}{\partial x'}=0 \quad \text{より} \quad m\frac{d^2x'}{dt^2} &= 2\omega m\dot{y}'+m\omega^2x' \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}'}-\frac{\partial L}{\partial y'}=0 \quad \text{より} \quad m\frac{d^2y'}{dt^2} &= -2\omega m\dot{x}'+m\omega^2y' \end{aligned}$$

得られた運動方程式の右辺第 1 項は**コリオリの力**を表す。右辺第 2 項は**遠心力**を表す。これらも**慣性力**の一種である。これらの例で見られるように慣性力のような見かけの力が自動的に得られる。

4. 有限振幅の単振り子

重力が作用している状況下で、質量 m、腕の長さ ℓ の**単振り子**を考える。支点のでの角度を θ とする。

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2-mg\ell(1-\cos\theta) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta} &= m\ell^2\frac{d}{dt}\dot{\theta}+mg\ell\sin\theta \quad \text{であるので} \\ \frac{d}{dt}\dot{\theta} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{aligned} \tag{60}$$

つり合いの位置からのずれを表す θ が十分小さい場合、$\sin\theta\sim\theta$ となり、よく知られた**単振動**の式となる。式 (60) の解の性質を検討するには、高校までの数学には決して現れない**楕円積分**が必要になる。特殊な関数を用いることになるが、その性質はよく調べられている。

単振り子の運動は基本的に 2 次元の運動である。実際、解析力学を用いずにこの運動を考える時には、重力と張力を 2 次元ベクトルとして扱う。しかし、この運動は原点からの距離が一定であるという条件 (**束縛条件**) がある。そのために運動の自由度を 1 とし、振り子の振れる角度を新たな座標として問題を考え、ポテンシャルを伴わない張力について忘れることができる。このように自由度を減らせるような束縛条件を**ホロノミック**であるという。どのような束縛条件が**ホロノミック**であるか、については別途十分検討しなければならない。

6.3 ハミルトンの解析力学

解析力学にはより整った別の形式の表し方がある。以下ではその表式について扱う。

ラグランジアン L は、$q_i, \dot{q}_i$ の関数として書かれていた。独立変数として $q_i, \dot{q}_i$ を採用したことになる。ここで、変数変換をすることを考える。$\dot{q}_i$ の代わりに $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$(**一般化運動量**) を独立変数として用いることにしてみよう。もともとのシステムが $q_i, \dot{q}_i$ で記述されているので、$\dot{q}_i$ を $\dot{q}_i(q_i, p_i)$ という関数を考える。そして、今後 $\dot{q}_i$ は独立変数と見なさない。このような変数変換を行う場合には**ルジャンドル変換**を考えると都合がよい。ルジャンドル変換とは次の式 (61) で表されるようなものである。L のルジャンドル変換 $H(q_i, p_i)$ は**ハミルトニアン**と呼ばれている。

$$H(q_i, p_i, t) \;=\; \sum_j p_j \dot{q}_j(q_i, p_i) - L(q_i, \dot{q}_i(q_i, p_i), t) \tag{61}$$

ここで、$L = T - U$ であったこと、また、T が $\dot{q}_i$ の 2 次式であること (普通はそうであること) を思い出そう。すると、$\sum_j \partial L/\partial \dot{q}_j \times \dot{q}_j = 2T$ となるので、$H = T + U$ となる。H は全エネルギーに相当するのである。次にハミルトニアンの独立変数についての微分を考える。

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \;=\; \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \;=\; \dot{q}_i \tag{62}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} \;=\; \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \;=\; -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;=\; -\dot{p}_i \tag{63}$$

変形に式 (56) と p_i の定義を用いた。これら二つの式 ($\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$) は運動方程式の別の形の表式であり、**ハミルトンの正準運動方程式**とか**正準方程式**と呼ばれている。ラグランジュの運動方程式と比較しよう。運動エネルギー T が $\dot{q}_i$ の 2 次式であることを考えると、ラグランジュの運動方程式に含まれる $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ は、事実上、q_i の 2 階の微分方程式である。それに対して正準方程式は 1 階の微分方程式が 2 本一組で現れる。では、この表式の何が利点なのか。確かに式として単純に書かれているようには見えるが、果たしてそれだけなのか。そもそも p_i を定義するためにはラグランジアン $L(q_i, \dot{q}_i)$ を求める必要がある。L を求めた上で、さらに H を求める必要はあるのか。

位相空間

正準方程式は物体の運動を決定する。その時、q_i の時間変化と p_i の時間変化が H を通じて q_i と p_i(と t) の関数として与えられるようになっている。これを q_i と p_i を座標とするような空間 (**位相空間**という) を用いて考えよう。まず、物体の状態は位相空間内の点 (q_i, p_i) で表される。そして、物体の状態の時間変化は位相空間内のベクトル $(\dot{q}_i, \dot{p}_i)$ で表され、そのベクトルは H を通じて q_i と p_i(と t) の関数として与えられるのである。特に自由度が 1 で $H(q, p)$ が時間変化しない場合を考えてみよう。この位相空間内での H の勾配 ∇H は、この位相空間内の点の速度 $(\dot{q}, \dot{p})$ に直交している $((\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}) \cdot (\dot{q}, \dot{p}) = -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} = 0)$。つまり、状態を表す点は H の等値線に沿って動く。こうした図形的イメージは理解に役立つ。実は H はエネルギーに対応しており、H の等値線に沿った動きはエネルギー保存則に対応する。

物理量の時間変化

保存量かどうかを判定する方法が簡単に記述できることも利点である。q_i, p_i の関数である物理量 $Q(q_i, p_i)$ の時間変化を考えてみよう。正準方程式を用いると次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \sum_i \frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \\ &= \sum_i \frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{64}$$

この表記はよく現れるので特別な表記 $[Q, H] \equiv \sum_i \frac{\partial Q}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial Q}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$ を導入する (教科書によって定義が違うことがあるので注意)。これは**ポアソン括弧**あるいはポアソンの括弧式と呼ばれている。運動の自由度が 1 の場合に、$\frac{dQ}{dt} = 0$ という条件の意味を考えよう。

$$\frac{dQ}{dt} = [Q, H] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{vmatrix} = 0 \tag{65}$$

このように、条件 $\frac{dQ}{dt} = 0$ は**ヤコビアン** $\begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{vmatrix}$ がゼロであることに対応する。この条件は、位相空間内での Q の**勾配** $\left(\frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p}\right)$ と H の勾配 $\left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$ とが平行であるという条件でもある。そして、このことは自由度が 1 の場合には Q が (局所的には) H の関数として $Q(H)$ と表せること、すなわち、保存量 Q はエネルギーの関数であることを意味している。

ハミルトニアンの時間変化

ハミルトニアン自身の時間変化を考えてみよう。一般に $H(q_i, p_i, t)$ は t を陽に含んでいるので次のようになる。ハミルトニアンが t を陽に含んでいなければ H は時間的に一定である。

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{66}$$

その他

ここでは紹介しない**正準変換**の考え方によって変数の選び方はより柔軟になる。

7 おわりに

古典力学の専門家でもない私は力学の教科書を書く立場にない。本当に本格的に勉強したい人は、何十年も使われている本格的な教科書を読んでほしい。それなのにこのノートを書いたのは、いくつかの理由がある。一つには、果てしないように思われる力学の世界の地図を与えたかったからである。また、復習する際の道具として利用してもらえればと思ったからである。最後に、そのようなニーズがあると思われるのに、このようなノートは短すぎて出版されることはないからである。

私が大学生のときに、ある友人が解析力学の 7 ページのメモを作ってくれた。それは自分が学ぶ前はチンプンカンプンであったが、学んだ後に大いに役立った。彼への感謝の気持ちを思い起こしながらこのノートを記した。

索 引