物体の落下 with 抵抗

1. 速度に比例した抵抗がある場合

   運動方程式は次のようになる。鉛直上向きを正にとる。

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - k_1 v \tag{1}$$

   ※ 速度は下向き ($v < 0$) なので、$-v > 0$ となり、抵抗力は上向き

   この微分方程式を解く。変数変換として、$v = -\frac{mg}{k_1} + v'$ とする。すると v' についての次の運動方程式が得られる。

$$m\frac{dv'}{dt} = -k_1 v' \tag{2}$$

   このようなタイプ (v' を t で微分したら v' が現れるタイプ) の微分方程式については答えがわかっている。

$$v' = C\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right) \tag{3}$$

$$v = -\frac{mg}{k_1} + C\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right) \tag{4}$$

2. 速度の 2 乗に比例した抵抗がある場合

   運動方程式は次のようになる。鉛直上向きを正にとる。

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + k_2 v^2 \tag{5}$$

   ※ $v^2 > 0$ となり、抵抗力は上向き

   この微分方程式を解く。変数変換として、$v = -\sqrt{\frac{mg}{k_2}} + v'$ とする。すると $-mg + k_2 v^2 = -mg + k_2\left(\frac{mg}{k_2} - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}v' + v'^2\right) = k_2\left(-2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}v' + v'^2\right) = k_2 v'\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right)$ となり、v' についての次の運動方程式が得られる。

$$m\frac{dv'}{dt} = k_2 v'\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right) \tag{6}$$

   これは変数分離形 (掛け算・割り算で、v' だけの式と t だけの式に分離できるタイプ) と呼ばれる微分方程式の型である。(「変数分離型」と書くよりも「変数分離形」と書くことの方が多いようである。)

$$\frac{1}{v'\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right)}\frac{dv'}{dt} = \frac{k_2}{m} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{v'\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right)}dv' = \int \frac{k_2}{m}dt \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}}\int \frac{1}{v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}} - \frac{1}{v'}dv' = \int \frac{k_2}{m}dt \tag{9}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}}\left(\log\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right) - \log v'\right) = \frac{k_2}{m}t + C \tag{10}$$

$$\log\left(v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\right) - \log v' = 2\frac{k_2}{m}\sqrt{\frac{mg}{k_2}}t + C' \tag{11}$$

$$\frac{v' - 2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}}{v'} = C'' \exp\left(2\sqrt{\frac{k_2 g}{m}}t\right) \tag{12}$$

$$v' = \frac{2\sqrt{\frac{mg}{k_2}}}{1 - C'' \exp\left(2\sqrt{\frac{k_2 g}{m}}t\right)} \tag{13}$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}\left(\frac{2}{1 - C'' \exp\left(2\sqrt{\frac{k_2 g}{m}}t\right)} - 1\right) \tag{14}$$

3. 運動方程式と微分方程式

   これまで見てきたように、運動方程式は微分方程式である。特に、力が定数であったり、速度の関数だけで書き表されるときに、この微分方程式は解けることが多い。微分方程式を解く方法は、それぞれのタイプによって異なるので、それなりの訓練が必要である。そしてその基礎として、微分積分学が重要になってくる。

4. 未知数

   積分する時にはいつも、未知数の問題がある。この場合、(4) 式の C とか (14) 式の C'' で記した未知数が現れる。この未知数はどのように決めたらいいだろうか。

   このような問題では初期 ($t = 0$) の速度を与えて解くことが多い。$t = 0$ での速度が与えられれば、こうした未知数を決定することができる。未知数を決定するために必要な初期の値を「初期値」という。また、初期の状態を与える条件という意味で「初期条件」という言葉も使う。

5. 終端速度 (終速度)

   それぞれの答えで、$t \to \infty$ の時の極限で v の値がどのような値になるか考えてみよう。(4) 式では、$v \to -\frac{mg}{k_1}$ となる。(14) 式では、$v \to -\sqrt{\frac{mg}{k_2}}$ に近づくことがわかる。

   このような速度は終端速度 (テキストでは「終速度」) と呼ばれている。十分に時間が経過し、速度が一定になると、速度が一定であることから、加速度がゼロである。運動方程式を考えると、落下する物体に作用する力の合力がゼロということになる。別の言葉で言えば、重力と抵抗力がつり合うようになる、ということである。

   微分方程式を解く過程で、あらかじめ終端速度を予想して、その終端速度からのずれ (どちらの問題でもこのずれを v' と記した) を扱っていることに注意しよう。

6. 数値計算

   では、こうした微分方程式を解く「技」を持っていなければ力学をできるとは言えないのだろうか？古典的な意味ではそうである。従来の「力学」では微分方程式がしっかり解ける、ということも学習課題の一つである。

   ただし、その考え方は揺らいでいる。それは微分方程式を数値的に解くことができるようになってきたからである。数値的に解く技を身につけていれば、ある程度、数学的な実力不足をカバーできる。いかに数式としてきちんと解くことができたとしても、それをグラフ化して、力学的な解釈を与えることが必要である。そして、そうだとすれば、途中の数式を飛ばして数値計算して、その結果を解析してもいいように思うからである。

   逆に言えば、数学をきちんと解けるか、あるいは数値計算できるか、最低限、どちらかの実力は身につけておきたいものである。