等加速度運動についての公式の導出

1 はじめに

高校までの数学の練習の効果は重要である。高校まで練習しないで、大学に入って、簡単にその差を埋めることはできない。高校で練習した人と同程度にできるようになるためには、それなりの練習がどうしても必要である。そして、教員はその練習を劇的に少なくすることはできない。勉強は、「言葉を理解すること」「言葉と言葉の関係を理解すること」そして、「練習すること」がポイントである。最後の一つは、本人が頑張るしかない。

ただ、苦手意識を持ったり、計算が遅かったりすることと、できないこととの間には、決定的な違いがある。できない人は、いつまもでやろうとしないので、ずっとできない。新しい世界が開けない。苦手だったり、計算が遅かったりする人は、練習すればいいだけなので、単に練習すればいい。家庭教師をするふりをして、中学生向けの練習問題集を買って練習すればいい。(タレント劇団ひとりは、ドリルをするのが趣味らしい。)

このプリントの目的は、「できることを確かめること」にある。丁寧に読んで、式変形が理解できること、そして、このプリントを見ないで導くことができることを、各自、確認すること。物理概論受講時の一番最初に、プリント「数学の扱い」を配布してある。基本的には同程度の話である。カレーが作れて、下駄箱に靴を入れられるか、という問題と思ってもよい。

できないところは人によって様々である。だから、全員向けに説明できない。できなかったとしたら、どの段階の式変形ができないのかを、それぞれが、はっきりさせて質問してほしい。納得できるように、よろこんで説明しよう。

2 問題例

今回の問題は、次のような問題である。与えられた 2 式

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at && (1) \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 && (2) \end{aligned}$$

から、次の公式を導く。

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v)t && (3) \\ v^2 - v_0^2 &= 2a(x - x_0) && (4) \end{aligned}$$

「うまい方法」は、ここでは求めず、方針を立てやすい方法を選び、淡々と解いていく。

1. a を消去して、式 (3) を導く。

   初めに、基本方針を確認しよう。式 (1) と式 (2) は、どちらも、a を含んでいてる。1 つの式を変形して、$a =$ という形にして、a を求め、それをもう一方の a に代入すれば、a が消える。これで求められるはずだ。

   どちらの式から、a を求めてもいいが、やりやすそうなのは、項の数が少ない式 (1) だ。この式を $a =$ の形に変形しよう。(a について解こう。)

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v - v_0 &= at \\ \frac{v - v_0}{t} &= a && (5) \end{aligned}$$

   式変形の各段階で、(1) 両辺から v_0 を引く (2) 両辺を t で割る という操作をしたことを確認しよう。こうして、右辺を a だけにすることができた。a について解けた。なお、(2) の段階で t で割っている。そこで、t がゼロでないことを確かめる必要がある。経過時間 t がゼロ

である時を考えることは、元の式 (1)、(2) を用いる理由を減らすことになるので、考えなくて良さそうだ。

それでは、式 (1) から得られた式 (5) を、式 (2) に代入してみよう。a の部分を、$\frac{v-v_0}{t}$ に置き換えればいい。計算をうっかり間違えないように、置き換えた部分は括弧 () でくくっておく。

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{v-v_0}{t}\right)t^2 \\
&= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(v-v_0)\,t \\
&= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}v_0 t \\
&= x_0 + \frac{1}{2}v_0 t + \frac{1}{2}vt \\
&= x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \\
x - x_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v)t \qquad (6)
\end{aligned}$$

2. t を消去して、式 (4) を導く。

ここでも、初めに、基本方針を確認しよう。式 (1) と式 (2) は、どちらも、t を含んでいてる。1 つの式を変形して、$t =$ という形にして、t を求め、それをもう一方の t に代入すれば、t が消える。これで求められるはずだ。

t を求めるのは、t^2 が入っていない式 (1) を用いるべきだ。そうでなければ、2 次方程式を解かなければならず、大変だ。この式を $t =$ の形に変形しよう。(t について解こう。)

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + at \\
v - v_0 &= at \\
\frac{v-v_0}{a} &= t \qquad (7)
\end{aligned}$$

例によって、割る数 a がゼロだと困るので検討しよう。$a = 0$ の場合というのは、加速度がゼロ (つまり、等速直線運動) なので、今の興味の対象ではない。そこで、$a \neq 0$ の場合を考えることはもっともなことだ。

それでは、式 (1) から得られた式 (7) を、式 (2) に代入してみよう。t の部分を、$\frac{v-v_0}{a}$ に置き換えればいい。計算をうっかり間違えないように、置き換えた部分は括弧 () でくくっておく。

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 \\
x - x_0 &= v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\frac{(v-v_0)^2}{a^2} \qquad (8) \\
&= \frac{1}{a}\left(v_0(v-v_0) + \frac{1}{2}(v-v_0)^2\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(vv_0 - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2)\right) \qquad (9) \\
&= \frac{1}{a}\left(vv_0 - v_0^2 + \frac{1}{2}v^2 - vv_0 + \frac{1}{2}v_0^2\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left(v^2 - v_0^2\right) \\
2a(x - x_0) &= v^2 - v_0^2 \qquad (10)
\end{aligned}$$

式 (8) を得るために、両辺から x_0 を引き、分数の 2 乗は、分母と分子それぞれを 2 乗したものに等しいことを用いた。式 (9) を得るためには、() のついた項のかけ算を行った。式 (10) を得るためには、両辺に $2a$ をかけた。

なお、こうして得られた式 (3) と式 (4) は、意味づけもできる。式 (3) は、数学を勉強した人は、平均値定理と結びつけて考えることができるはずだ。式 (4) については、力学的エネルギーと関連付けて議論できる。しかし、それらはここでの話題ではない。