2 次関数と三角関数

1. 2 次関数

2 次関数の諸性質を理解するためには、2 次方程式の解についての理解を深めことが必要である。2 次方程式の解の公式の導出は、物理学概論テキストの付録にある。式変形の基本的な要素が多数含まれているので、これを見ないで自分で導けるように練習しておくとよい。x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、式 (4) から、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となる。関連して、ここでは、 2 次式の変形を行う。

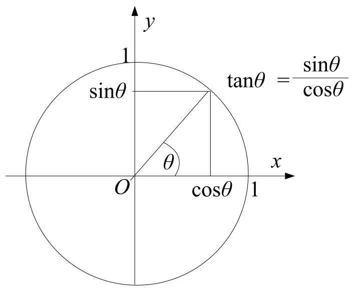
$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) && (1)\\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) && (2)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) && (3)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) && (4)
\end{aligned}$$

次の 2 点を確認しよう。

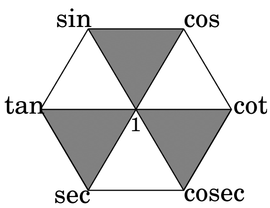
- 2 次式を因数分解したとき、各因数をゼロとするような x が対応する 2 次方程式の解
- 式 (3) から、$x=-\frac{b}{2a}$ のとき、2 次式の値は ($a>0$ なら) 最小値 $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ をとる。

2. 三角関数

定義



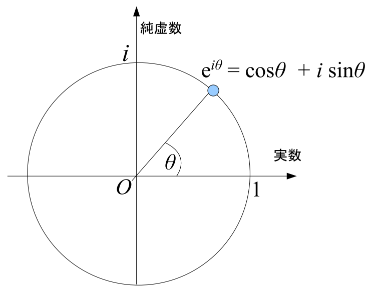
その他の三角関数



(a) “co”+左側の関数名→右側の関数名
(b) ある三角関数は、その両隣の積
例: $\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta$
(c) 1 を挟んだ三角関数は互いに逆数
例: $\cos\theta=1/\sec\theta$
(d) 暗い三角形：三平方の定理
例： $\tan^2\theta+1^2=\sec^2\theta$

複素数の平面極座標表示と加法定理

複素数についてのオイラーの式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$($i$ は虚数単位 $i^2=-1$) は、図と対応させて覚える。あとは、$e^{i(\alpha+\beta)}$ にオイラーの式を適用したものと、指数法則に基づいて $e^{i\alpha}\times e^{i\beta}$ としてからオイラーの式を適用したものとを比較する。



$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}}+i\ \underline{\sin(\alpha+\beta)}\\
e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\
&= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}}+i\left(\underline{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}\right)
\end{aligned}$$

複素数が等しいとき、実部、虚部がそれぞれ等しいので次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\therefore\ \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}} &= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}}\\
\underline{\sin(\alpha+\beta)} &= \underline{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}
\end{aligned}$$