微分法

1. 定義

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \tag{1}$$

2. 主な関数の導関数

(a) 代数関数：$f(t) = t^n$

$$\begin{aligned}
\frac{dt^n}{dt} &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t^n + nt^{n-1}\Delta t + \frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t^2 \cdots) - t^n}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t \cdots \right) \\
&= nt^{n-1}
\end{aligned} \tag{2}$$

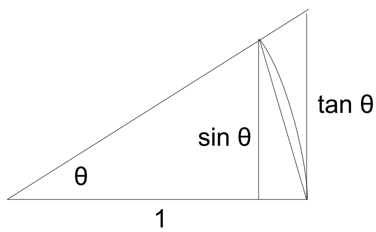
(b) 三角関数：$f(t) = \sin t$

$$\frac{d\sin t}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin t}{\Delta t}$$

ここで、ちょっとトリックを使う。Δt は正負を問わないので、次のようにしてもよい。

$$\begin{aligned}
\frac{d\sin t}{dt} &\equiv \frac{1}{2}\left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t-\Delta t) - \sin t}{-\Delta t} \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin(t-\Delta t)}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\cos t \sin \Delta t}{2\Delta t} \\
&= \cos t \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t}
\end{aligned}$$

問題は $\frac{\sin \Delta t}{\Delta t}$ の極限値を求めることに還元された。この極限の値は次の図を用いて説明される。



図の三角形と扇形の面積の大小関係から、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

$\theta \to 0$ で $\cos\theta \to 1$ である。そこで、$\frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \to 1$ である。従って次のようになる。

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t \tag{3}$$

(c) 指数関数：$f(t) = e^t$

$$\frac{de^t}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^t(e^{\Delta t} - 1)}{\Delta t} = e^t \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$

問題は $\frac{e^{\Delta t}-1}{\Delta t}$ の極限値を求めることに還元された。ところで、ネイピア数 (あるいは自然対数の底) と呼ばれる数 e は次のように定義されていた。

$$e \equiv \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\delta \to 0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

δ と Δt とを共にゼロに近づける必要がある。以下では $\delta = \Delta t$ を保ちつつ近づけることを考える (いいのか?)。

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lim_{\delta \to 0} (1+\delta)^{\frac{\Delta t}{\delta}} - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1+\Delta t)^{\frac{\Delta t}{\Delta t}} - 1}{\Delta t} = 1$$

そこで次のようになる。

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t \tag{4}$$

3. 微分についての法則

(a) 線型性

次のような性質は定義から明らか。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Cf(t)) &= C\frac{d}{dt}f(t) \qquad (5)\\ \frac{d}{dt}(f(t)+C) &= \frac{d}{dt}f(t) \qquad (6)\\ \frac{d}{dt}(f(t)+g(t)) &= \frac{d}{dt}f(t)+\frac{d}{dt}g(t) \qquad (7) \end{aligned}$$

まとめると、次のような性質がある。

$$\frac{d}{dt}\left(af(t)+bg(t)+C\right) = a\frac{d}{dt}f(t)+b\frac{d}{dt}g(t) \qquad (8)$$

(b) 合成関数の微分

これも定義から想像される関係である。

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt} \qquad (9)$$

(c) 逆関数の微分

$y=f(x)$ のとき、$\frac{dy}{dx}$ がわかっていたとする。逆関数 $x=f^{-1}(y)$ について、$\frac{dx}{dy}$ を求めたとすると、定義から次のようになる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad (10)$$

例えば、$y=e^x$ のとき、$x=\log y$ である。そこで次のようになる。

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \qquad (11)$$

(d) 積の微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\log f(t)g(t)\right) &= \frac{1}{f(t)g(t)}\frac{d}{dt}f(t)g(t)\\ \frac{d}{dt}\left(\log f(t)g(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\log f(t)+\log g(t)\right) = \frac{1}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t)+\frac{1}{g(t)}\frac{d}{dt}g(t) \end{aligned}$$

二つの結果が等しいので次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(t)g(t)}\frac{d}{dt}f(t)g(t) &= \frac{1}{f(t)}\frac{d}{dt}f(t)+\frac{1}{g(t)}\frac{d}{dt}g(t)\\ \frac{d}{dt}f(t)g(t) &= g(t)\frac{d}{dt}f(t)+f(t)\frac{d}{dt}g(t) \qquad (12) \end{aligned}$$