等加速度運動と積分

1. 加速度から速度の時間変化を求める。

   積分がどのようなものであるかについては、物理学概論である程度学習した。例えば、加速度が一定であるような運動 (等加速度運動, 図下段) の場合に、速度がどのように時間変化するだろうか。速度の経過時間に対する変化を表したグラフの傾きが加速度なので、加速度が一定であるということになる。そこで、速度の時間変化を表すグラフは直線になる (図中段)。定量的に考えてみると、加速度 a は速度の時間変化 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ で表せる。そこで、

   $$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a\Delta t &= \Delta v \end{aligned}$$

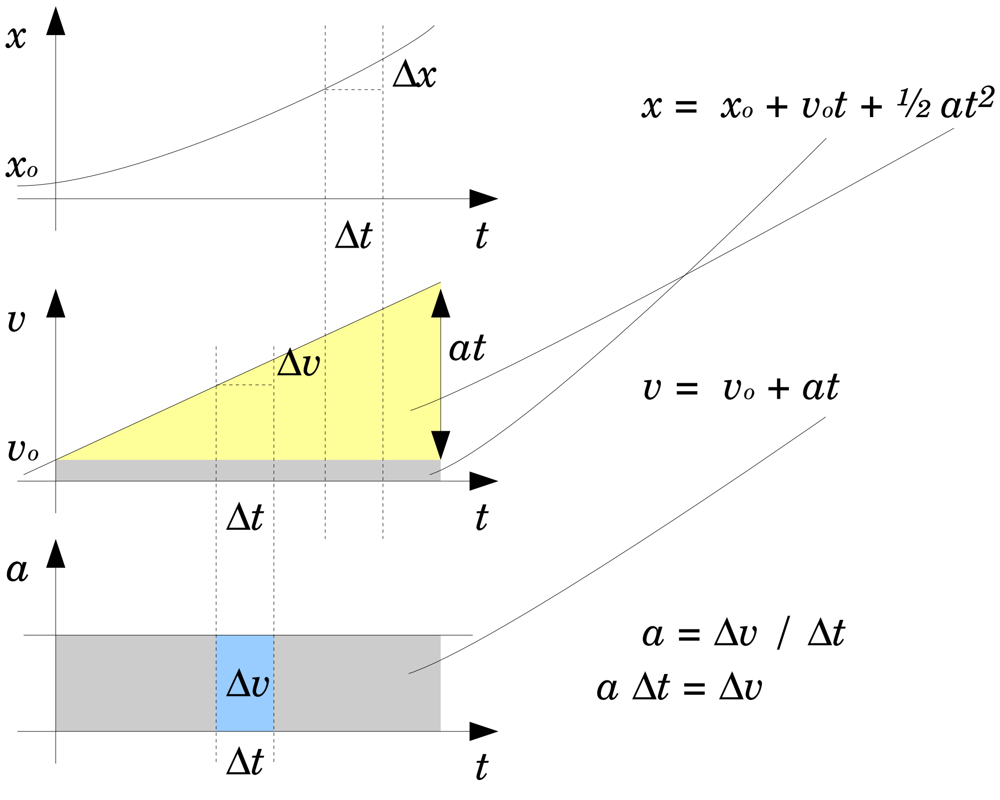
   である。これは、時間 Δt の間の速度の増加分は $a\Delta t$ すなわち、下段の図の青い部分の面積が速度の増加分に対応することを意味している。様々な時刻に対応する Δt で同様のことが言えるので、時刻 0 からある時刻 t までの速度の増加分は、図の灰色の部分の面積 at である。時刻がゼロの時の速度を v_o とすると、速度は次のような式で表される。

   $$v = v_o + at$$

2. 速度から位置の時間変化を求める。

   まったく同様のことが速度と位置についても言える。ただし、面積を計算する際に、長方形 ($v_o \times t$) と三角形 ($\frac{1}{2}t \times at$) の両方を考える必要がある。

   $$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$



3. より一般的な話

ここまででわかったように、物理学概論で「積分する」と言っていたものは、面積を求めることに対応している。a が時間変化する場合も含めて、Δv に対応する面積がどのように表現されるかを考えてみると次のようになる。

$$\Delta v \quad = \quad \lim_{\Delta t \to 0} \sum a \ \Delta t$$

ただし、合計は時刻 0 からある時刻 t まで行う。

微分する場合にコンパクトな表現が与えられていたのと同じように、積分することを上記のように表現するのは面倒である。そこで、積分にも数学的な表記が与えられている。例えば、加速度を積分して速度を求める操作は次のように表される。

$$\Delta v \quad = \quad \int_0^t a \ dt'$$

積分記号 $\int$ も合計を意味する総和記号 Σ も、英語の合計を意味する sum の頭文字 s に由来している。積分記号の上下についた値は積分範囲 (積分する範囲) を意味している。dt' の t' は積分範囲 t と区別するために t ではなく t' とした。

さて、今度は左辺の Δv を v にできないかを考えてみよう。Δ をつけなければならないのは時刻 0 の時の速度 v_o がわからないからである。それは、速度 v 側の事情であって、加速度 a 側の事情ではない。加速度 a の情報だけでは速度 v を決めることができない。そのような時には、例えば工夫として定数分だけ値が決まっていないことを表現するような方法がある。それは、次のような方法である。

$$v \quad = \quad \int a \ dt$$

積分範囲 (特に下端) を明記しなければ、値に不確定要素が定数分だけ生じる。積分範囲を明記しないものは不定積分と呼ばれ、明記するものは定積分と呼ばれている。

こうした積分を用いて、ここで学んだものを改めて表記すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
v \quad &= \quad \int a \ dt = at + v_o \\
\Delta v \quad &= \quad \int_0^t a \ dt' = at \\
x \quad &= \quad \int v \ dt = \int at + v_o \ dt = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + x_0 \\
\Delta x \quad &= \quad \int_o^t v \ dt' = \int_o^t at' + v_o \ dt' = \frac{1}{2}at^2 + v_o t
\end{aligned}$$