円運動と一般の 2 次元運動

1　不等速円運動

1. 問題設定・位置

   原点を中心とした半径 r の円運動を考える。x 軸から測った角度を時間の関数 $\theta(t)$ とする。すると、この物体の位置に対応した位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は次のように書ける。

   $$\boldsymbol{r} \quad = \quad (r\cos\theta, \quad r\sin\theta)$$

   これを後々のために、半径 r と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と向きが一致する単位ベクトル $\boldsymbol{i}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ を用いて表しておく。

   $$\boldsymbol{r} \quad = \quad r(\cos\theta, \quad \sin\theta) = r\boldsymbol{i}_r$$

2. 速度ベクトル

   速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトルを時間で微分して得られる。ベクトルを微分した結果は、各成分ごとに微分して得られたものを成分とするベクトルであることを思い出そう。

   $$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = r\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}_r \quad &= \quad \left(\frac{d}{dt}(r\cos\theta), \quad \frac{d}{dt}(r\sin\theta)\right) \\ &= \quad \left(-r\sin\theta \times \frac{d\theta}{dt}, \quad r\cos\theta \times \frac{d\theta}{dt}\right)\end{aligned}$$

   ただし、計算過程では合成関数の微分法を用いた。後々のために、これを速さ v $(= r\frac{d\theta}{dt})$ と速度ベクトルの向きを向いた単位ベクトル $\boldsymbol{i}_v = (-\sin\theta, \quad \cos\theta)$ との積で書いておく。

   $$\boldsymbol{v} \quad = \quad r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta, \quad \cos\theta) \quad \equiv \quad v\boldsymbol{i}_v$$

   速度ベクトルの大きさ (速さ) に着目すると、一般的に $v = r\frac{d\theta}{dt}$ と書けることもわかる。特に $\frac{d\theta}{dt}$ は角速度と呼ばれ ω と書くことが多い。そこで、速度は次のように書ける。

   $$\boldsymbol{v} \quad = \quad r\omega(-\sin\theta, \quad \cos\theta)$$

3. 加速度ベクトル

   加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ は、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を時間 t で微分することで得られる。

   $$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad &= \quad \left(-r\omega\frac{d}{dt}\sin\theta - r\sin\theta \times \frac{d\omega}{dt}, \quad r\omega\frac{d}{dt}\cos\theta + r\cos\theta \times \frac{d\omega}{dt}\right) \\ &= \quad \left(-r\omega^2\cos\theta - r\sin\theta \times \frac{d\omega}{dt}, \quad -r\omega^2\sin\theta + r\cos\theta \times \frac{d\omega}{dt}\right) \\ &= \quad -r\omega^2\boldsymbol{i}_r + r\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{i}_v \\ &= \quad -r\omega^2\boldsymbol{i}_r + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{i}_v\end{aligned}$$

   ただし、計算には関数の積の微分法も用いている。また、$v = r\omega$ から、$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ であることを用いた。この結果を言葉で表すと次のようになる。一般的に円運動の場合、加速度は二つの互いに直交する成分に分けることができる (一般に $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ とは直交するので。3.1 節参

照。)。一つは、位置ベクトルの逆向き (つまり、回転中心向き) で大きさが $r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$ であるような成分である。もう一つは、速度ベクトルに沿って大きさが「速さの時間変化率」(つまり、1 次元の運動とみなしたときの加速度)) であるような成分である。

原点を中心とする円運動の場合に、位置ベクトルと速度ベクトルが直交すること

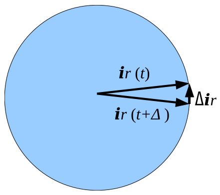
この円運動で、位置ベクトルと速度ベクトルが直交することを複数の方法で示そう。

(a) 直感的な説明

円運動の場合、円の接線が中心からの半径を表す線分と直交することから、位置ベクトルと速度ベクトルは明らかに直交する。

(b) 図を用いた説明

円運動の場合の位置ベクトルは、大きさが変わらず向きだけが変化する。そこで、速度ベクトルの向きは位置ベクトルの時間変化で決まる方向を向いている。ベクトルの大きさが変化しないで Δt をゼロに近づけたとき、二つのベクトルの差で決まるベクトルは、元のベクトルに直交することが予想される。



(c) 三平方の定理を使った説明

両者が直交するのであれば、両者の差で作られるベクトルの大きさは、三平方の定理から位置ベクトルと速度ベクトルの大きさで表されるはずである。

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{i}_v - \boldsymbol{i}_r| &= |(-\sin\theta - \cos\theta, \cos\theta - \sin\theta)| \\
&= \sqrt{(-\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

二つの単位ベクトルの始点を合わせたときに、始点とこれらのベクトルの終点でできる三角形を考える。この斜辺の長さが $\sqrt{2}$ となるのは、考えている三角形がが直角二等辺三角形のときだけである。そこで、両者は直交する。

2　等速円運動の場合

等速円運動の場合は速さ v が一定で円運動する。そこで $\frac{dv}{dt} = 0$ である。また θ は t の 1 次式で書ける。そこで $\theta(t) = \omega t$ とする。すると次のようになる。(これらのベクトルの向きを図示すること！)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (\ r\cos\omega t,\ \ r\sin\omega t) = r\ (\ \cos\omega t,\ \ \sin\omega t\ ) \\
\boldsymbol{v} &= (\ -r\omega\sin\omega t,\ \ r\omega\cos\omega t) = r\omega\ (\ -\sin\omega t,\ \ \cos\omega t\ ) \\
\boldsymbol{a} &= (\ -r\omega^2\cos\omega t,\ \ -r\omega^2\sin\omega t) = r\omega^2\ (\ -\cos\omega t,\ \ -\sin\omega t\ )
\end{aligned} \tag{1}
$$

以下では、r, v, a, ω の関係をみてみよう。まず、不等速円運動と共通して、次のような関係がある。

$$
v = r\omega
$$

等速円運動の場合には、加速度は常に中心向きであるので、中心向きの成分だけ書き出し、上記の関係式を用いると、加速度は次のように表される。

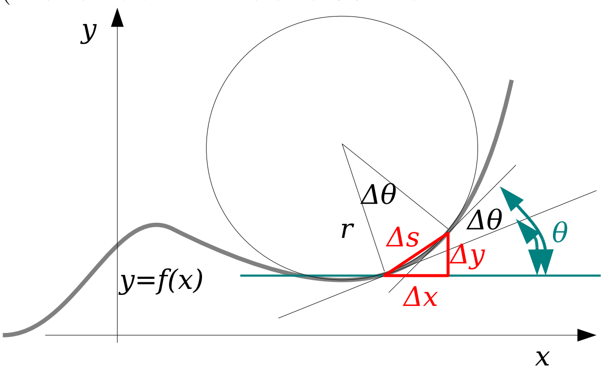
$$\begin{aligned} a &= r\omega^2 \\ a &= v\omega \\ a &= \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

これらは物理学概論で扱った等速円運動についての関係式を微分法を用いて示したものである。

3　円運動でない一般の場合との関係

3.1　曲率円と曲率半径

2 次元的な運動の場合、その軌跡の部分部分は円弧の一部であると考えてよい。そのような円は曲率円 (接触円) と呼ばれている。曲率円の半径を曲率半径といい、曲率半径の逆数を曲率という。(※ 曲率が大きいとは、曲率半径が小さいということである。)



普通の軌跡であれば、次のように曲率半径 r を求めることができる。具体的には、x, y 平面で、y が x の関数 $y(x)$ として与えられている場合について示そう。まず、円の性質として、中心から円周上の点に引いた線と、その点での円の接線は常に直交している。曲率円の場合にもこの関係が常に成り立つとしよう。(そうできるかどうかは実は重要な問題だと思われるが、ここでは前提とする。) すると、図のような関係から、

$$r\Delta\theta = \Delta s \tag{2}$$

が成り立つ。ここで s は曲率円の円周あるいは、関数 $y(x)$ の線上にとった長さであり、Δs は微小な長さ Δx に対応する線の長さの変化分である。微小量の間には、他にも関係がある。一つは、三平方の定理から次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ \frac{\Delta s}{\Delta x} &= \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

また、角度 θ と x, y は次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{dy}{dx} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{4}$$

これらから曲率半径 r を求める。

$$r = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{d\theta}{dx}}$$

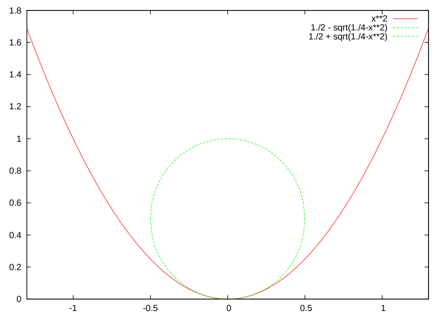
ここで、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

を代入すると、結局、曲率半径 r は次のようになる。

$$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

この結果を放物線 $y = ax^2$ に適用してみよう。$x = 0$ での曲率半径は $\frac{(1+(2a\times 0)^2)^{\frac{3}{2}}}{2a} = \frac{1}{2a}$ である。



3.2　一般的な 2 次元運動の速度ベクトルと軌跡

軌跡が描かれているとき、速度ベクトルは軌跡に沿っている (軌跡の接線の向きである) ことを示す。$(x(t), y(t))$ のうち、$x(t)$ の逆関数を考える。つまり、t を x の関数だと考える。すると、接線の傾きは速度の比 (v_y/v_x) で表されるので、速度ベクトルは軌跡に沿っていることがわかる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

3.3　一般的な 2 次元運動の加速度

教科書に書いてあるように、速度を書き直し $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}_v$ としてみる。すなわち、速度をその大きさ (速さ)$v(t)$ と、速度方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}_v(t)$ の積で表現するということである。すると、その時間変化は次のように書ける。これは、不等速円運動の加速度とよく対応している。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = v\frac{d\boldsymbol{i}_v}{dt} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{i}_v$$

すなわち、第一項は、速度の向きの変化に伴う加速度である。曲率円が定義できるなら、速度の向きの変化率の大きさは、曲率円の中心を原点としたときの位置ベクトルの変化率の大きさに等しい (3.1 節の図を参照のこと)。そこで、その大きさは ω である。したがって、第一項の大きさは $v\omega$ である。曲率円が定義できるなら $v = r\omega$ の関係式が成り立つので、結局 $r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r}$ である。

第二項については、不等速円運動と同様に、軌跡に沿った 1 次元の運動だと思ったときの加速度に対応している。