

グラフを作る

1 はじめに

以前の講義では、人間の認知能力は、正しく判断できるとは限らなかったり、また、人によって違ったりするために、客観的で定量的な測定を行うのであるという話をしました。そして、測定についてお話しした時には、実際に長さの測定をしてもらいました。ところが、そのようにして数値として測定したデータの量が多くなると、数値をながめているだけではわかった気がしません。それでは、測定したデータは、どのように扱ったらいいのでしょうか。

1つの方法はグラフにする方法です。測定された数値データを図にして認識しようという方法です。これは非常に逆説的な話だと私も思います。せっかく客観化されたデータを、図にし、再び人間の認知能力に頼って理解するのですから。そして、実際、そのような問題は重要な問題です。グラフにする時には誤解を招かないような表示の仕方を心がけるべきです。

こうした点にも注意しながら、いくつかのグラフについての技術を学んでいきましょう。

2 グラフ用紙（方眼）

近年は、与えられたデータは計算機（パソコン）で処理し、パソコンの適当なソフトウェアを用いて表示することが多くなりました。ところが、そうしたソフトの多くは、財務会計用であることが多く、理科の学習や研究に適しているとは言えません。その上、ほとんど無いとは思いますが、ソフトウェアが間違っている可能性は否定できません。もちろん、人間が手書きでグラフを作る際にもミスをしますし、その方が確率は高いでしょう。それでも、グラフを読み解くためには、ある程度、手書きで練習しておくことは必要だと思います。

まずは、グラフを作成する時に考えてほしいのは、軸の選択です。横軸と縦軸をどう使い分けるべきでしょうか。実は、習慣でどちらを横軸に選ぶかは決まっています。独立変数を横軸に、従属変数を縦軸にとるのが習慣です。言葉を変えると、縦軸には横軸の値の関数と考えられるものを採用します。典型的には自由に変更できるもの、制御できるもの、あるいは、考えたい値として選択したもの、などが横軸の値として採用され、それに応じて値がかわるものを縦軸に採用するのです。

2番目に気をつけてほしいのは、グラフを作成する上での基本的な要素が欠けないようにすることです。その要素とは、次のようなものです。

1. グラフのタイトル

2. 横軸・縦軸の

- タイトル
- 数値（軸上の切りのいい数値）
- 単位

- 目盛（必要に応じて書き加える。）

それでは、早速グラフを作ってみましょう。

初めは金利についてのデータです。最初に 1 万円預けて、毎年 15% の利子がついた場合、預けたお金はどのように増えていくのでしょうか。簡単な計算をしてみました。もう 1 つは、物理学的な現象です。真空中を落下する物体の時間と落下距離との関係です。

経過時間/年	元利合計金額/円	経過時間/秒	落下距離/m
0	10000	0	0
1	11500	1	4.90
2	13225	2	19.6
3	15208	3	44.1
4	17489	4	78.4
5	20112	5	123
6	23128	6	176
7	26597	7	240
8	30586	8	314
9	35173	9	397
10	40448	10	490

複利計算による元利合計金額の時間変化

落下距離の時間変化

これらの例について、まず、軸の選択を考えてみましょう。どの値を横軸にすべきでしょうか。今回の場合、時間が与えられて、それに応じて総額や落下距離が決まったと考えるのですから、横軸に時間をとり、縦軸に金額や落下距離をとるようにして下さい。これは人間が感覚にそう思う、という部分もあるかもしれませんが、しかし、皆¹がそれに従っているルールであると考えた方がいいでしょう。

これらのデータについてグラフを作成してみると、どちらも、時間とともに「どんどん増えていく」という様子が描かれていることがわかります。しかし、増え方の程度（曲線の曲がり具合）を比較することは難しいです。一般的に、人間の目で曲線の様子から情報を読み取るのは難しいのです。

3 グラフ用紙（対数目盛）

そのような時には、対数目盛を用いると便利ことが多いです。対数目盛は、最初は扱いにくいと思います。しかし、慣れるととても便利なので、ぜひ、しっかり理解したいものです。

配布したグラフ用紙を見てください。1 枚は、先ほどグラフを書いた普通のグラフ用紙です。ところが、残りの 2 枚は目盛が等間隔ではないことに気づくと思います。不等間隔の目盛が対数目盛です。縦軸・横軸に両方とも対数目盛が用いられているグラフ用紙は両対数グラフの用紙です。

¹もしかしたら、左から右に横書きをする習慣のある人の性質なのかもしれません。

片方の軸だけ対数目盛のグラフ用紙は片対数グラフの用紙です。

対数目盛の特徴は、同じような目盛のパターンを繰り返していることです。値が増えていくと目盛が密集し、あるところを境に、急に目盛の間隔が広がります。その境目の値を、ここでは仮に 10 としましょう。すると、そこよりも値が小さい方の隣りの境目は、1 です。そこよりも値が大きい方の隣りの境目は 100 です。このように、10 倍された値が等間隔に並んでいるのが対数目盛です。0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000 といった 10 倍ごとの数字が等間隔に現れてくるのです。

このような対数目盛は、したがって、使うときに注意が必要です。注意点を列挙してみましょう。

1. 任意の場所を 1 にできない。

目盛のとり方に制限があります。上で述べた境目以外を 1 にすることはできません。0.01 とか 100 も同様です。また、1 の隣りの境目は 0.1 と 10 です。一足飛びに 100 とか 1000 にすることはできません。

2. 0 は表示できない。

0.1 のとなりは 0.01 で、そのとなりは 0.01、0.001、... となります。これらが等間隔に現れるので 0 が現れないことは容易に想像できます。

3. 目盛に対応する数値は間隔から推定する。

例えば、1 から 10 までの目盛を見ると、不等間隔であることがはっきりします。グラフ用紙の目盛の値は、線の太さなどで想像つくようになっています。前後の間隔などにも注意しながら値を考えて下さい。

このような対数目盛を用いてグラフを作成すると、先ほどのデータはどのようにグラフとして表されるでしょうか。試してみてください。

4 常用対数

ここで、対数について勉強しておきましょう。ある数 A の常用対数とは、10 を何乗したら A になるかを考えたときのその数のことです。例えば、100 は、10 の 2 乗 (10^2) です。そこで、100 の常用対数は 2 です。1000 は 10 の 3 乗 (10^3) です。そこで、1000 の常用対数は 3 です。これを次のように書きます。

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

一般的に、次の二つの式は同じ意味です。

$$A = 10^x$$

$$\log_{10} A = x$$

あるいは、上の式の 10 の指数部分の x に下の式の x を代入すると、

$$A = 10^{\log_{10} A} \quad (1)$$

という関係が得られます。これは一般的な関係です。

このような対数は、時々便利に使えます。実は、私が高校生のころは、教科書に計算尺と呼ばれるものが掲載されていた記憶があります。これは、電気をいれなくて、かけ算や割り算ができる計算機のようなものです。では、電気を使わずにどうして掛け算ができるのでしょうか。

それは対数の性質を用いることによってできます。対数を用いると、掛け算を足し算に変えることができるのです。例えば、 3×4 という計算をすることを考えましょう。その対数は、 $\log_{10} 3 \times 4$ です。ここで、対数の性質を使うと、次のような関係が成り立ち、かけ算の対数が、対数の足し算になるのです。

$$\log_{10} 3 \times 4 = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$$

このような関係式は、次のような計算で確かめられます。式 (1) から、

$$3 \times 4 = 10^{\log_{10} 3 \times 4}$$

であり、また、指数法則を用いると、

$$\begin{aligned} 3 \times 4 &= (10^{\log_{10} 3}) \times (10^{\log_{10} 4}) \\ &= 10^{\log_{10} 3 + \log_{10} 4} \end{aligned}$$

となります。両者を比べると、 $\log_{10} 3 \times 4 = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$ となるわけです。

計算尺はこのような性質を利用して計算するのです。互いにスライドする2つの板の上に、今回紹介したような対数目盛がそれぞれつけられています。一方の尺 A の 3 のところに、他方の尺 B の 1 を合わせます。尺 B の 4 のところに対応する尺 A の値が答えになります。

5 スケーリング則

両対数グラフで直線になるような関係は、スケーリング則と呼ばれることがあります。スケーリング則がなぜ成り立つのか、ある程度理由付けができるものが多いものの、きちんとしたことはわからないものもあります。そこで、個人的にはスケーリング則に興味があります。

スケーリング則の1つの特徴は、「固有のサイズがない」と言えることです。以下のスケーリング則を例にして、考えてみましょう。

1. ゲーテンベルク・リヒター則

地震国である日本に住んでいる私たちは、地震のことについて直感的に色々知っています。大きな地震の頻度は少なく、小さな地震は沢山起こります。このような関係をデータを集め、両対数グラフで表すと、直線に近くなります。このような関係は、ゲーテンベルク (Benot Gutenberg) とリヒター (Charles Francis Richter) によって見出されたのでゲーテンベルク・リヒターの法則と呼ばれています。

この様な関係は、大きな地震も小さな地震も同じような理屈で発生していることを示唆して

います。大きな地震だけが特別な理由で発生するのではなく、同じような理屈で発生しているのではないかと思わせるものです。地震予知が可能か、という議論とも関連して興味深い点です。

ところで、このグラフを見ると、横軸が対数目盛になっていないのではないかと思った人もいます。横軸には地震の規模を表すマグニチュードの値をとっています。ところが、マグニチュードは地震のエネルギーの大きさの対数をとったものなので、両対数グラフに該当するのです。

2. クライバー則

生物の体重と生物の代謝量 (酸素消費量とか、発熱量とか) との関係を調べてみると、基本的には体重に応じて代謝量が増えます。これは簡単に想像できる話です。しかし比例はしません。体重が2倍になっても、代謝量は2倍にはならず、より少ない値になります。ところが、両対数グラフで描いてみると、様々な動物の種・科を越えて、1つの直線上で表されるように見えます。このような関係は、クライバー (Max Kleiber) によって発見されたのでクライバーの法則と呼ばれています。

グーテンベルグ・リヒター則と同様に考えることで、クライバー則は生物の特徴的な大きさを決める法則ではないことがわかります。それは、代謝量や体重を考えただけでは、「ある大きさ以上の生物はいない」というような議論をすることができないことを意味しています。

3. 戦争の規模と発生回数についての関係

自然界だけではなく、人間の行う行動にもスケーリング則が現れます。よく知られている例の1つは、戦争の規模と発生回数のグラフです。両対数グラフで描くと、ほぼ直線になることがわかります。

地震と同じように、こちらも小さな戦争から大きな戦争まで、同じような理屈で起こっていることを予期させます。このことが書いてある書籍を参照すると、戦争の間の時間間隔が広がるほど、次は大きな戦争になるようなことも指摘されています。私たちは戦争の無い世界を目指さなければなりません。そうしたときに、歴史をこのような観点から学ぶ必要があるのではないのでしょうか。

6 おわりに

さて、元利合計金額と落下距離についてのグラフが出来あがったと思います。片対数グラフで直線になるのはどちらでしょうか。また、両対数グラフで直線になるのはどちらでしょうか。「大体直線になる」という話ではありません。ぴったり直線になります。人間は、曲線の微妙な違いを判定できません。ところが、直線かどうかについては敏感に判定できます。そこで、直線で表すことができるように、片対数グラフや両対数グラフを用いることが多いのです。

自由落下については、少しだけ補足しておきましょう。自由落下のデータは両対数グラフで直線になったはずですが、自由落下の時間と落下距離にはスケーリング則が成り立っているのです。つまり、落下現象には固有の大きさというものがありません。この性質は、実は、映画の特殊撮影技術 (特撮) にも応用されています。物体が落ちる様子をスローモーションにしたり、早回しにしたりすると、それを見ている人が判断する高さは変わってきます。例えば、巨大な怪獣が町を破壊する

シーンなどはスローモーションで再生されます。すると、あたかも怪獣が本当に町を破壊しているかのように見せることが可能になるのです。適当な時間スケールを用いれば、どんな高さのスケールも表現できるという意味で、自由落下運動は「固有の大きさ」が無いと言えます。

今回はグラフについて学びました。今後、様々な講義でデータがグラフで示されるでしょう。また、実験科目では自分でグラフを作成することが求められるでしょう。今回の講義内容を参考にし、正しくデータを読み取れるように、また、より伝わりやすいグラフを作成できるように心がけて下さい。

片対数グラフや両対数グラフで直線になるのはどんな関数関係でしょうか。次のような式を参考に考えてみましょう。

$$y = ax^p \quad (2)$$

$$y = bc^{qx} \quad (3)$$

これら二つの関係式の対数をとってみます。

$$\log y = \log a + p \log x \quad (4)$$

$$\log y = \log b + qx \log c \quad (5)$$

$X = \log x, Y = \log y$ とおくと、次のようになります。

$$Y = \log a + pX \quad (6)$$

$$Y = \log b + (q \log c) \times x \quad (7)$$