比例を使う

1　はじめに

前回の講義では、測ることについて考えてきました。例えば、テレビ番組「大科学実験」では、象の質量を測定することにチャレンジしていました。川の上のフロート (浮いた構造物) に象を載せ、フロートが沈んだ量を測定します。次に、同じだけ沈むまで人を載せます。最後に、フロートに乗った人の体重を合計することで象の体重を推定しました。しかし、同じ量だけ沈むまで、ひとを載せる必要があったでしょうか。10 人ぐらいの人数でも象の重さを推定できたのではないでしょうか。

また、屋外で植物や動物の写真撮影を行うとき、大きさがわかるように、コインを同時に置くことを推奨しました。それでは、実際にそのようなことから、本当に物の大きさがわかるのでしょうか。

こうした題材に触れながら、比例関係について考えていきたいと思います。

2　写真を使った大きさの推定

500 円玉を写り込ませたシーサーの写真があります。この写真に基づいて、シーサーの置物の横幅、右側のシーサーの横幅と高さ、左側のシーサーの横幅と高さを推定してみましょう。なお、500 円玉の直径は 2.65[cm] であることが知られています。

まずは、写真の中での大きさがわからなければ話になりませんので、500 円玉の直径と、シーサーの写真上での横幅を物差しで測ってみましょう。例えば、500 円玉の写真の上での測定結果が 1.82[cm] で、シーサーの置物の横幅が 4.31 [cm] であったとします。これらがわかったところで、どのように実際の置物の横幅を求めたらいいでしょうか。実際に考えてみてください。また、結果が出たら、自分はどのように考えたか振り返ってみてください。

様々な考え方があるかと思います。その中で、次のような考え方もあると思います。

考え方 例 (1)：

大きいものは、その大きさに応じて、写真でも大きく写る。そこで、500 円玉の直径と、知りたい長さの比率は、写真の上でも、実物でも同じになる。そこで、次のような比率の関係が成り立つ。

$$1.82[\mathrm{cm}] : 4.31[\mathrm{cm}] \quad = \quad 2.65[\mathrm{cm}] : x$$

比は割り算と考えることができるから、

$$1.82[\mathrm{cm}] \div 4.31[\mathrm{cm}] \quad = \quad 2.65[\mathrm{cm}] \div x$$

が成り立つようになればいい。あるいは、比の内項の積と外項の積が等しいしてもよい。そこで、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1.82[\mathrm{cm}]}{4.31[\mathrm{cm}]} &= \frac{2.65[\mathrm{cm}]}{x} \\ x &= 2.65[\mathrm{cm}] \times \frac{4.31[\mathrm{cm}]}{1.82[\mathrm{cm}]} \\ &= 6.28[\mathrm{cm}] \end{aligned}$$

考え方 例 (2)：

500 円玉の写真の上での大きさと実物の大きさとの比は、別のものについての写真上での大きさと実物の大きさとの比に等しい。(これは、地図の縮尺とか、コピー機の倍率とかに相当する。)

$$1.82[\mathrm{cm}] : 2.65[\mathrm{cm}] \quad = \quad 4.31[\mathrm{cm}] : x$$

この比が成り立つように計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1.82[\mathrm{cm}]}{2.65[\mathrm{cm}]} &= \frac{4.31[\mathrm{cm}]}{x} \\ x &= 4.31[\mathrm{cm}] \times \frac{2.65[\mathrm{cm}]}{1.82[\mathrm{cm}]} \\ &= 6.28[\mathrm{cm}] \end{aligned}$$

となる。

このような計算をしたら、大まかにチェックする習慣をつけましょう。今回の場合、本当は 2.65[cm] の 500 円玉が写真では 1.82[cm] に写っているのですから、実物は写真よりも大きいわけです。写真で 4.31[cm] のものは、実際にはより大きいはずです。確かに答えは写真の上での大きさよりも大きくなっています。

シーサーの別の部分の長さにつても同様に考えることができます。こうした測定を繰り返すと、計算には共通する部分が多いことに気づくはずです。500 円玉の実際の大きさも写真の上での大きさも変わりませんから、1 度測ればいいですし、500 円玉にかかわる計算も、1 度しておけばいい

はずです。つまり、

$$\begin{aligned} x &= \frac{2.65[\mathrm{cm}]}{1.82[\mathrm{cm}]} \times 4.31[\mathrm{cm}] \\ &= 1.46 \times 4.31[\mathrm{cm}] \end{aligned}$$

の赤い文字で表した部分は、1 度計算しておけばいいということになります。関係式を言葉で表すと次のようになるでしょう。

$$\text{実際の大きさ} \quad = \quad 1.46 \times \text{写真の上での大きさ}$$

このことに気づいていれば、計算量は少なくて便利です。計算量を減らす仕組みがあることは、私たちにとってうれしいことですので、この例を題材に、より詳しく考えてみることにしましょう。

3 比例関係

まず、最初に、上で述べた比の式の考え方を復習してみましょう。それぞれの例の中で、考え方を書きました。どちらの場合でも、「物体間の比率はいっしょ」とか、物体が異なっても「写真と実物の比率はいっしょ」という考え方でした。これらはまとめると、ある量が変化すると、それに応じて別の量も変化する、という関係であることがわかります。このような関係を**比例関係**といいます。比例関係は次のように表すことができます。

$$\text{別の量} \quad = \quad \text{定数} \quad \times \quad \text{ある量}$$

ある量が 2 倍になると、別の量も 2 倍に、ある量が 3 倍になると別の量も 3 倍になるような関係です。式中の定数は、**比例係数** (あるいは比例定数) と呼ばれています。これは場合によって異なる値になります。写真の例では 1.46 でした。比例定数には特別な名前がついていることが多いです。この場合では、**倍率**という言葉が適当でしょう。写真上の長さに倍率をかけると、実際の大きさになるのです。(多くの場合、実際の大きさを基準にして、実際の大きさを何倍したら写真上での長さになるか、を表す量を倍率とか縮尺とかいいます。ここでの倍率とは意味とは異なり、互いに逆数の関係になっているので、気をつけてください。)

こうした関係はグラフに表すこともできます。比例関係はグラフでは原点を通る直線で現されます。この時の**傾き**が比例係数になります。1 次式の傾きと、比例定数が対応していることを確認してください。

比例係数は、次のように考えることもできます。「ある量が 1 だとしたら別の量がいくつになるか、その量」という考え方です。「ある量」のところに 1 を代入してください。別の量は比例係数と一致します。

比例関係は対応関係の 1 つなので、図で表すと理解しやすいかもしれません。図 1 に写真上の長さと実際の長さの対応関係を示します。写真上の長さ 1 つ 1 つは、実際の長さ 1 つ 1 つに対応します。その対応関係は、一定の倍率で関係づけられます。このような対応関係があるとき、両者の間には比例の関係があるのです。ここで気をつけたいのは、写真上の長さが 2 倍になると、実際の長さも 2 倍になる、という関係があることです。比例の場合、写真上の長さの比率が実際の長さの比率と一致ような対応関係になっているのです。

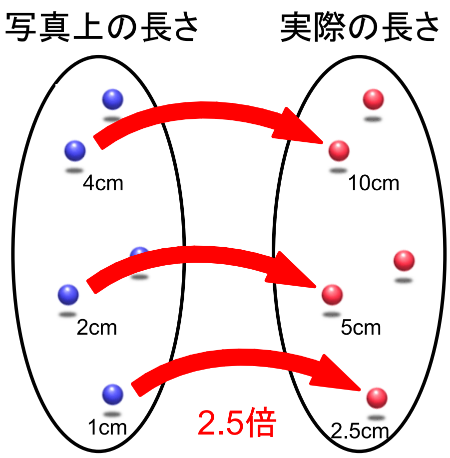

図 1: 対応関係としての比例

この比例関係は、実用的で重要な考え方ですから、しっかり身につけておきたいです。しかし、残念ながら、この考え方を身につけるのに皆さんには障害があります。それは、計算方法についての丸暗記勉強法の代表格である「はじき」「みはじ」などが頭に入っているからです。計算方法だけ覚えて対処しようとする発想は、初めて勉強する人がとりあえずわかった気になるためには必要かもしれません。しかし、比例関係は世の中に沢山あります。その度に暗記法を作るわけにもいきません。暗記法がなければ理解できないのであれば、自分の理解できる世界を狭めてしまい、いわば牢屋の中に閉じこもっているようなものです。比例の考え方をぜひ身につけて、自由になってもらいたいものです。

4　比例関係のいろいろ

ここでは、いろいろな比例関係を考えることで、その応用範囲の広さを理解してもらいたいと思います。

- 通貨

  金銭には地域に応じて様々な通貨があります。当然、円建てのお金の価値は、ドル建てのお金の価値に比例します。交換する際には、特定の比率に基づいて計算します。例えば、今現在 (2014 年 11 月中のある時刻で)、1 ドルは 115 円 69 銭で交換できます。2 ドルなら 2 倍の値の 231 円 38 銭です。

  $$\text{円建ての金額} \quad = \quad \frac{115\,\text{円}\,69\,\text{銭}}{1\,\text{ドル}} \times \text{ドル建ての金額}$$

  比例係数は**為替レート**と呼ばれています。

- 賃金

  時給制の仕事は、働いた時間に比例して賃金がもらえます。例えば、時給 888 円 (現時点で東京都の最低賃金) なら、

  $$\text{賃金} \quad = \quad \frac{888\,\text{円}}{1\,\text{時間}} \times \text{労働時間}$$

比例定数は**時給**です。

- 塩分量

  海水には塩分 (ほぼ塩化ナトリウム) が溶けています。溶けている塩分の量は、海水の量に比例します。

  $$溶けている塩分の量 \quad = \quad 濃度 \times 海水の量$$

  比例係数を**濃度**といいます。海水の場合の塩分濃度は、だいたい 3.5%ぐらいです。100[g] の海水には 3.5[g] の塩分があるわけです。

- 沸点上昇

  水に物質 (不揮発性物質) が溶けているとき、沸点が上昇します。この現象を沸点上昇といいます。沸点の上昇量は、溶液の濃度 (質量モル濃度) に比例します。

  $$沸点上昇 \quad = \quad 0.52[\mathrm{K\ kg/mol}] \times 質量モル濃度$$

  比例係数 (0.52 [K kg/mol]) は**モル沸点上昇**と呼ばれています。(ここに示したモル沸点上昇はだいたいの値です。)

- 移動量

  一定の速さで運動している物体の移動量は、時間に比例します。

  $$移動量 \quad = \quad 速さ \times 時間$$

  比例係数は**速さ**です。

練習問題： 5 分で 1.5km 進むとき、2 時間でどれだけ進めるでしょうか。1 時間ではどうでしょうか。5 時間ではどうでしょうか。30 分ならどうでしょうか。

5 比例に似た関係・比例関係の拡張

比例に似た関係もよく現れます。

1. 直線的な関係

   一番よく現れるのが、グラフにすると直線で表せるが原点を通らないような関係です。このような関係は、比例関係ではありません。しかし、原点をずらせば比例関係になりますから、表現のし方を変えればいいのです。

   - バネの例：

     バネの長さとバネの復元力 (元に戻ろうとする力) とは、比例関係ではなく、直線的な関係です。しかし、バネの伸びと復元力の大きさは比例します。バネの自然な長さを基準にして、そこからのずれを考えれば比例関係になるというわけです。

- 物体の移動の例：

  原点以外の場所から、ある時刻に、一定の速度で移動を開始します。これらも比例関係ではありません。しかし、出発点からの位置の変化量 (これを変位といいます。) と経過時間には比例の関係があります。

2. 反比例

   3 つのケーキを何人かで分けることを考えましょう。3 人で分ければ、1 人につき 1 つです。30 人で分ければ、1 人につき 1/10 です。300 人で分けると、1 人につき 1/100 になってしまいます。この 1 人当たりの分け前は、もちろん、人数には比例しません。ところが、1/人数 (人数分の 1) に比例します。このような関係を反比例といいます。

3. 変数の関数に比例

   直接その値には比例しないけれども、その値を基にして計算したものに比例する、という場合もあります。

   例えば、万有引力と呼ばれる力があります。万有引力によって、すべての質量を持つ物体は、互いに引き合っています。その大きさは、二つの物体の質量にそれぞれ比例します[1]。

   また、この万有引力には、距離の 2 乗分の 1 に比例する性質があります。

   練習問題：

   (a) 万有引力は、距離の 2 乗分の 1 に比例します。すると、遠い方が強くなるのでしょうか、近い方が強くなるのでしょうか。
   (b) 物体間の距離が 10 倍になると、万有引力の大きさは何倍になるでしょうか。
   (c) 地球と太陽の間に作用する万有引力と、地球と月の間に作用する万有引力を考えましょう。どちらが何倍大きいでしょうか。ただし、地球と太陽の距離は、地球と月の距離のおおよそ 400 倍です。また、太陽は月の 2700 万倍の質量を持つとする。

4. スケーリング則

   スケーリング則は、なぜか世の中で成り立っていることの多い法則です。しかし、なぜそのような法則が成り立っているのか、きちんとわからないことが多いので、興味深い関係です。

   スケーリング則について説明する前に、常用対数について簡単に説明しましょう。例えば、10 を 2 乗すると、$10^2 = 10 \times 10 = 100$ となります。10 を 3 乗すると、$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ となります。このような関係を考えると、100 に 2 を、1000 に 3 を対応づけることができます。これを次のように表現します。

   ・ 100 の常用対数は 2
   ・ 1000 の常用対数は 3

   つまり、ある数が与えられたとき、その値が 10 の何乗であるかを考え、その何乗であるかを表す数を、与えられた数の常用対数とするわけです。

   このような常用対数を用いると、二つの量の間に直線的な関係が見られることがあります。二つの量の常用対数の間に直線関係が成り立っているというわけです。このような関係は、

[1] 全ての人間も万有引力によって引き合っていると言えます。しかし、それを感じないのは、人間の質量が小さいからです。地球とか月とか、非常に質量の大きな物体でなければ感知できません。

一般的に**スケーリング則**と呼ばれています。スケーリング則を表すには、両対数グラフ[2]を用いると便利です。例えば、次のような例があります。

- クライバー則

  陸上動物について、体重と代謝量 (エネルギー消費量) との関係について調べてみると、それらの対数同士は直線関係になります。一つの種についての関係ではなく、様々な種についてこの様な関係があるために興味深い規則です。

- グーテンベルグ・リヒター則

  一定の時間内で考えてみると、大きな地震の頻度は低く、一方、小さな地震は沢山発生します。これらの間にどのような関係があるかを調べたところ、地震のエネルギーの対数であるマグニチュードと、発生数の対数の間に直線的な関係があることがわかりました。これをグーテンベルグ・リヒター則といいます。

- 戦争の法則

  グーテンベルグ・リヒター則と同様の法則が戦争についても成り立っていると言われています。死者の数で戦争の規模を表し、これと戦争の数を両対数グラフで表すと、両者は、ほぼ一つの直線で表されることがわかります[3]。

5. 比例関係の拡張

   比例関係は、多数の変数 (n 個) の組と、別の多数の変数 (m 個) の組との間に成り立つこともあります。ただし、その時の比例係数に相当するものは、$n \times m$ 個の数の集まりです。このような関係の性質は線形代数学で学ぶことができます。

   これは、比例関係のより一般的な形であるとみなすこともできます。n も m も 1 の場合が、これまで述べたような比例関係に該当すると考えることができるからです。一般的な比例関係は**線形関係**と呼ばれ、その性質は**線形性**と呼ばれています。

6 線形と非線形

比例関係 (より一般的には線形性を示す関係) は、人間が理解しやすい関係であると言えます。しかし、世界はより複雑です。その複雑な世界をどう理解するか、新しい視点が求められています。

例えば、比例関係だと思っていたものは、実際には比例関係が成り立たないことが多くあります。私たちは写真について作業しました。ところが、写真は 1 つの平面に現実を対応させせようとしているものですから、原理的にゆがみがあります。直線を撮影しても、写真上では直線になりません。

例えば、比例関係では説明しにくいこともあります。人間の心臓はどうして鼓動しているのでしょうか。人間の体を構成するのは化学物質です。化学物質は一般的には、ある物質から別の物質へ変化するとそれきりで、元に戻ることはありません。ところが、心臓が鼓動することは、元に戻るメカニズムがあることを示唆しています。かなり複雑なシステムがそこにはあります。このよな

[2]後日勉強します。

[3]これを根拠に、「人類は戦争が避けられない」とか「次の戦争では被害が壊滅的になるだろう」などと、予想したり、言うことはできるでしょう。しかし、実際にそうなるかどうかは、このような過去のデータを見ることができる私たちが、それを食い止める意志を持っているかどうかにかかっています。念のために書き添えます

システムでは、線形的な考え方がなかなか適用できません。生命現象や複雑な化学反応だけでなく、大気や海洋の運動も非常に複雑です。流れる物質の運動は、本質的に非線形的です。

それでは、こうした現象についてどのように対応したらいいでしょうか。今までは、個別の問題として、問題ごとに考えてきました。それぞれの分野で、それぞれにノウハウを積み上げ、現象を解明してきたのです。ところが近年、こうした非線形現象を統一的に考えることができないか、ということが色々と検討されています。こうした学問分野は非線形科学と呼ばれています。道のりは平坦ではありません。しかし、様々なことがわかってきています。スケーリング則も、その鍵の一つです。

皆さんも、これから様々な事を学ぶに当たって、線形とか非線形とかを意識してみて下さい。