

## 双曲線関数

### 1 復習 (じゃないかも)

#### 1.1 マクローリン展開 (テイラー展開)

ある関数  $f(x)$  のマクローリン展開は次のような無限級数である。ここでは、収束半径とかは気にしない。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots \\ &= f(0) + \sum_n \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \end{aligned} \quad (1)$$

- 練習問題

次の関数をマクローリン展開せよ。ここで、 $e^0 = 1, \sin 0 = 0, \cos 0 = 1$  であるので、簡単になることを予想してから行いなさい。

1.  $e^x =$

2.  $\cos x =$

3.  $\sin x =$

#### 1.2 オイラーの公式

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  をオイラーの公式という。

- 練習問題

1.  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  を複素平面上にプロットせよ。右側の余白を用いよ。

2. 上のマクローリン展開と関連付けて関係式を説明せよ。

3.  $\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta$  を説明せよ。

4. 加法定理  $\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  を  $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta}$  を用いて説明せよ。

5.  $\sin \theta$  を  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$  を用いて表せ。

## 2 双曲線関数

### 2.1 定義

双曲線関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\sinh x &\equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \operatorname{cosech} x &\equiv \frac{1}{\sinh x} \\ \cosh x &\equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \operatorname{sech} x &\equiv \frac{1}{\cosh x} \\ \tanh x &\equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \operatorname{coth} x &\equiv \frac{1}{\tanh x}\end{aligned}$$

● 練習問題

1.  $\sin ix, \cos ix$  を求めよ。
2.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x$  を求めよ。
3.  $\sinh x, \cosh x$  をマクローリン展開せよ。
4.  $\frac{d}{dx} \sinh x, \frac{d}{dx} \cosh x$  を計算せよ。
5.  $e^x$  を  $\sinh x, \cosh x$  を用いて表せ。
6.  $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \times e^\beta$  を用いて  $\sinh \alpha + \beta$  についての加法定理を示せ。
7.  $\sinh x, \cosh x, \tanh x$  の概形を描け。