飛行の基礎Ⅰ -2008-

平成 20 年 7 月 17 日

このノートは暫定版です。
講義したことのうち欠けている部分もあります (特に後半)。
講義で扱わずにここで補足している部分もあります。
急いで作ったので、誤った部分もあるかもしれません。
テスト範囲は講義全体です。

目 次

1 はじめに

- 物理学とは何か

日本の物理学者で多くの功績を残した**朝永振一郎**[1]は、「物理学とは何だろうか」[2] の中で次のように述べています。

> われわれを取り囲む自然界に生起するもろもろの現象ーただし主として無生物にかんするものーの奥に存在する法則を、観察事実に拠りどころをもとめつつ追求すること

このような認識は現在でも変わらないと思います。つまり、まず、物理学を定義することは難しいです。次に、生命そのものを扱うようなものとは、とりあえず一線を引いておく必要もありそうです。そして、この言葉が示しているように、物理学は、「何を」追求するかではなく、「どうやって」追求するか、というところに特徴があるということです。実際、物理学は、いろいろな科学の方法論としてとても広い範囲にいきわたっています。

- 物理量とは何か

ある現象を言葉で表現して人に伝える場合に、**定量的**な表現と、**定性的**な表現とがあります。前者は数値で表すもので、後者は数値を用いずに表すものです。例えば、速さを表すことを考えましょう。定性的に「速い」「遅い」といった表現で速さを表すことも可能です。また、定量的に、「時速 30km」と、数値で表すことも可能です。物理学では、誰でも同じような受けとめ方ができるように、つまり、「**客観的**」に情報が伝わるように、定量的な表現をすることが圧倒的に多いです。

物理学で扱う量は、「**物理量**」といいます。誰が測っても同じになるもの、また、そうした量を基に計算して得られた量が物理量です。物理量は数値と**単位**で構成されます。例えば、「時速 30km」あるいは、「毎時 (まいじ)30km」というのは、「30」という数値と、「km/時」という単位で構成されます。単位は物理量を表すときの基準であるといえます。

- 国際単位系 SI

速さは、一定の時間内にどれだけの距離を進んだかで表されますから、時間にどのような単位を用いるか、また、距離にどのような単位を用いるか、によって、速さの単位が変わってきます。速さの単位が時間と距離の単位を組み合わせて作られているように、別の単位から組み合わせて作られる単位があります。そのような単位を**組み立て単位**といいます。一方、組み立て単位に用いるような、基本的な単位を**基本単位**といいます。

では、どのような単位が基本単位でしょうか。どのような単位を基本単位と選ぶかは、流儀によって異なります。しかし、現代の物理学では、ほとんどの場合、**国際単位系 (SI)** を用いることになっています。SI では次の 7 つの単位を基本単位としています。

[1]朝永振一郎先生は日本で二番目にノーベル賞 (ノーベル物理学賞) を受賞した研究者としても知られています。もっとも、ノーベル賞を受賞したからといって偉い人ばかりとは限らないことには注意が必要です。

[2]岩波新書

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)
電流	A	アンペア
温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ

その他の単位は組み立て単位として表します。例えば、面積は m^2 (平方メートル) です。密度は、単位体積あたりの質量ですから、kg / m^3 (キログラム毎 (まい) 立法メートル) です。

物理量には、正確に表現すると単位が無いものもあります。例えば、角度を表現するときの**弧度法**です。角度を表すには、0 度〜360 度まで「度」を用いて表す方法と、半径 1 の円周を考え、その角を中心角としたときの弧の長さ (0〜2π, π は円周率で 3.14159265359⋯) で角度を表す弧度法があります (図 1)。弧度法の単位は**ラジアン**です。しかし、この定義からして、弧の長さと半径との比ですから、本来は単位が無い物理量です。しかし、弧度法で表した角度であることが明確にわかるように、「ラジアン」をつけることが習慣となっています。

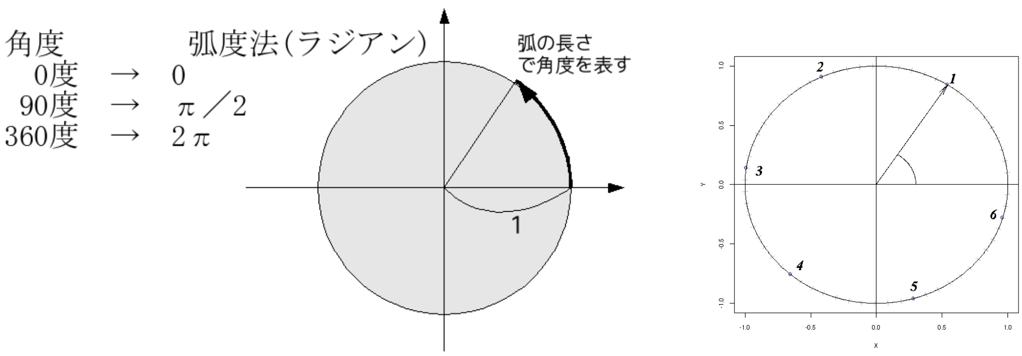


図 1: 弧度法について

- SI の接頭辞

ところが、このような単位だけでは扱いが難しいことも多々あります。例えば、地球規模の現象を考えてみましょう。地球一周の大きさは、およそ 40000000m です。ゼロが多くて扱いが大変です。そこで、次のような **SI の接頭辞**を用いることが多いです。

P	1000000000000000	10^{15}	**ペタ**
T	1000000000000	10^{12}	**テラ**
G	1000000000	10^{9}	**ギガ**
M	1000000	10^{6}	**メガ**
k	1000	10^{3}	**キロ**
h	100	10^{2}	**ヘクト**
da	10	10^{1}	**デカ**
d	0.1	10^{-1}	**デシ**
c	0.01	10^{-2}	**センチ**
m	0.001	10^{-3}	**ミリ**
µ	0.000001	10^{-6}	**マイクロ**
n	0.000000001	10^{-9}	**ナノ**
p	0.000000000001	10^{-12}	**ピコ**
f	0.000000000000001	10^{-15}	**フェムト**
a	0.000000000000000001	10^{-18}	**アト**

例えば、2000m は 2km のように書きます。0.05m は、5cm のように書きます。ただし、習慣によってよく使う場合とあまり使わない場合があります。先ほどの例にあげた地球 1 周の長さは、40Mm ですが、このような表現はあまりしません。40,000 km ということの方が多いです。

- 指数法則

  計算を行う場合には、指数法則を用いると便利です。当面必要な指数法則は次の通りです。

  - $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$
    ※ 10 を a 回掛け合わせたものに、10 を b 回掛け合わせたものをかけると、10 を $a+b$ 回掛け合わせることになる。
  - $\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$
    ※ 例えば、$10^5 \times \frac{1}{10^3} = 10^2$ となる。上の指数法則が成り立つようにするためには、$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ などと定義すると良い。
  - $(10^a)^b = 10^{ab}$
    ※ 10 を a 回掛け合わせたものを 1 セットとして、それを b セット掛け合わせると、全部で 10 を ab 回掛け合わせることになる。
  - $(\mathrm{A} \times \mathrm{B})^a = \mathrm{A}^a \times \mathrm{B}^b$
    ※ A も B も a 回かけている。

物理学の基本的な考え方を学んだり、また、わからないことがあったりした場合のための参考書として、次の書籍を紹介します。この書籍に書かれている量子力学や、相対性理論の部分は必要ありません。しかし、色々な事項が正確にコンパクトに書かれているので、お勧めの本です。わからないことに出会った時に調べる本として、あるいは、興味を持った部分を通読してみるためにもいいと思います。

- 「物理学基礎」
  原康夫著 (学術図書出版)

練習問題

1. 次の単位換算をしてみよう。
   (a) 1 [hPa] = [Pa] ([Pa] はパスカル)
   (b) 1 [m] = [km]
   (c) 1 [ℓ] = [cm^3]
   (d) 1 [ℓ] = [m^3]
   (e) 1 [m^3] = [cm^3]

※ $1\ell = 1000$ [cm^3] $= 10^3$ [cm^3]

2 ベクトル

2.1 3次元空間内の位置の表し方

この世の中は、3次元空間[3]です。これに対して、1次元は線の上だけの世界で、2次元は面内の世界です。
さて、3次元空間の中での場所を特定する方法を考えましょう。そのためには、ある基準の点からの相対的な場所を示すのがいいと思われます。その基準の点を「原点」といいます。3次元空間の中では、原点を通り、互いに直行する3本の直線を考えると便利です。これを座標軸といいます。通常、座標軸には、x, y, z の文字を当てます。また、x 軸は東向き、y 軸は北向き、z 軸は上向きにとるのが習慣です。原点と座標軸を合わせて「座標系」といいいます。

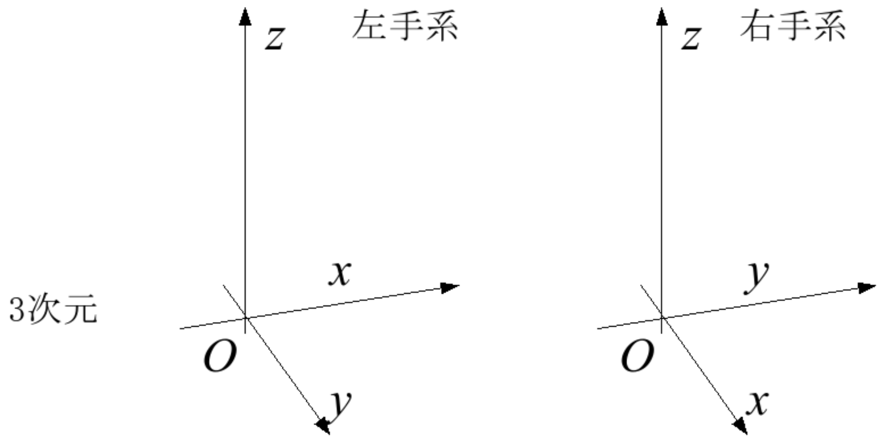


図 2: 座標系 (右手系と左手系)

x と y については、特に東と北でなくてもいいのですが、

- x, y は水平面内にとり、z は鉛直上向きにとる
- y が正の向きは x が正の向きの左側 (x が正の向きは y の正の向きの右側) にとる

ようにするのが普通です (図2の右側)。ここで述べたような x, y, z の位置関係を持つ座標系を「右手系」といいます。これに対して、x, y を入れ替えた位置関係にあるものを「左手系」といいます。私たちは通常、右手系を用います。
このように座標を設けると、空間内の任意の点を表すことができます。表現の方法は、二通りある。一つは、原点を起点として、その点を終点とするような矢印で表現する方法です。このように定義される矢印を「ベクトル」、特に「位置ベクトル」といいます。
もう一つの方法は、その点から各座標軸に垂線を下ろし、その垂線の足の値 (原点からの距離) を読み取り、その数値を並べて表記するものです。このような数値を「座標」といいます。

2.2 ベクトル

大きさと向きを持つものを一般に「ベクトル」といいます。それに対して、数値 (大きさ) のみのものを「スカラー」といいます。位置ベクトルと座標が対応するのと同様に、ベクトルは数値を並

[3]実際には相対性理論の示すように4次元空間に住んでいるのだが、3次元空間の中に住んでいると考えてよい。また、近年は、世界は5次元空間で初めて説明できるのだという説もある。また、ドラえもんの4次元ポケットは有名である。

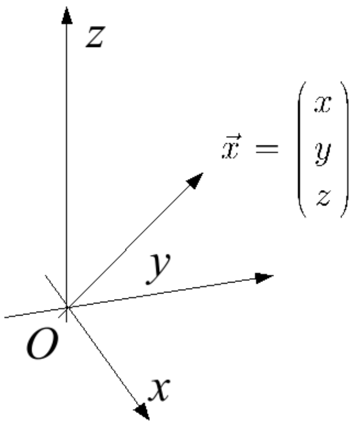


図 3: 位置ベクトル

べて表すことができます。そうして並べられた数値の一つ一つを「成分」といいます。

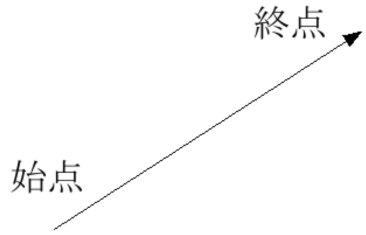


図 4: ベクトル

ベクトルで表すことができるものにはどのようなものがあるでしょうか。例えば、原点からの見たときの位置は、原点からの距離と同時に向きを指定しなければなりません。また、速度は、どちら(方向) にどれくらいの速さ (大きさ) で移動しているかを指定しなければなりません。そこで、これらはベクトルで表現されます。また、力も同様です。
ベクトルには次のような演算を決めることができるので、文字で表すことが多いです。ベクトルは、太文字で書いたり、あるいは、上に矢印をつけることが多いです。ベクトルを成分を並べて書いて表現することもあります。成分を横に書く場合を「横ベクトル」、縦に並べて書く場合を「縦ベクトル」といいます。
ベクトルには、次のような演算が定義されます。

1. 足し算

   ベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ に対して、 $\vec{p}+\vec{q}$ は、次のように定義されます。まず、二つのベクトルの始点を一致させ、二つのベクトルから平行四辺形を作ります。二つのベクトルの始点を始点とし、平行四辺形の対角線上の頂点を終点としてできるベクトルが、 $\vec{p}+\vec{q}$ です。

   一般にベクトルは平行移動しても同じものです。そこで、ベクトルの足し算は次のように定義してもいいです。つまり、まず、$\vec{p}$ の終点に $\vec{q}$ の始点を一致させます。次に、$\vec{p}$ の始点と $\vec{q}$ の終点でできるベクトルを考えて、それをベクトル $\vec{p}+\vec{q}$ とします。

   これを成分で表現することもできます。二つのベクトルの各成分の和が、ベクトルの和の成分となります。(証明は省略)

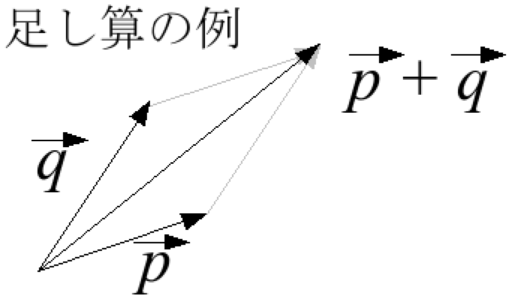


図 5: ベクトルの足し算

$$
\begin{aligned}
\vec{p}+\vec{q} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 引き算

   足し算ができると引き算を定義できます。通常、$A+B=C$ となるときには、$A=C-B$ となっています。そこで、$\vec{r}-\vec{p}$ は、$\vec{p}$ の終点を始点とし、$\vec{r}$ の終点を終点とするようなベクトルを考えればよさそうです。実際、そのように定義します。

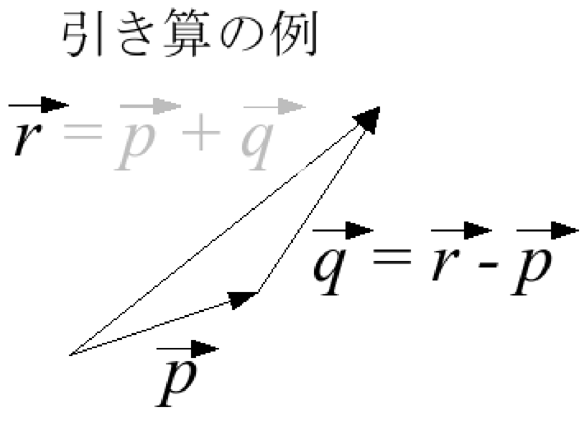


図 6: ベクトルの引き算

   これを成分で表現することもできます。二つのベクトルの各成分の差が、ベクトルの差の成分となります。

3. ゼロベクトル

   あるベクトルから同一のベクトルを引き算すると、大きさがゼロで向きが決まらないゼロベクトルが定義できます。

4. スカラー倍

   スカラー倍 (定数倍) とは、向きは同じで大きさを何倍かにすることです。スカラーを負の数にとると、逆向きのベクトルになります。

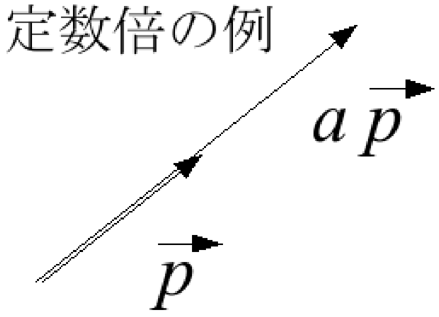


図 7: ベクトルのスカラー倍

これを成分で書いてみましょう。

$$\begin{aligned} a\vec{p} &= a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここまで、ベクトルの足し算、引き算、スカラー倍を学んできました。成分で見ると、成分同士の足し算であったり引き算であったり、定数倍であったりしますので、それほど違和感は無いと思います。

練習問題

1. 宿舎を原点にし、東向きに x 軸をとり、北向きに y 軸をとるとする。宿舎から大学までの通学経路を描いてみよう。また、位置を時間の関数として表すために、各地点での時刻を入れてみよう。
2. 宝の地図に、「東に 3km 進んで, それから北に 3km 進んだ地点に宝がある」と書かれてていたとする。結局、どちらに何 km 進んだ地点に宝があるのか？(16 方位や方位角は知っていますか？)
3. 「北東に 1.41km 進んで, それから西に 1km 進んだ地点に宝がある」ならばどうか？

2.3 3 つの力のバランス

綱引きをすることを考えます。二つの力で綱を引くとき、どちらかの力が強くなると、そちらに引かれてしまいます。二つの力が全く同じ場合のみ、力はバランスします。
ところが、3 つの力の場合には、かなり状況が違います。大きさの異なる三つの力でバランスさせることができます。特に興味深いのは、いろいろな力の大きさが多少変わっても、ある範囲内であ

れば、力の向きを変えることでバランスさせることができることです[4]。このような場合にもベクトルで考えると便利です。力は大きさと向きを持つのでベクトルで表すことができます。また、力は足し算ができるので、複数の力が同時に作用する場合には、それらの力のベクトルを足し算すればよいことになります。

例えば、三つの紐 (ひも) が結びつけられていて、三つの力がそれぞれ紐を引っ張るとしましょう。そして、下図のような状態でつり合ったとします。このような場合について、力のベクトルのバランスを考えてみましょう。下図で、紐 A を引く力 (ベクトル $\mathbf{F}_A$) は、紐 B を引く力 (ベクトル $\mathbf{F}_B$) と紐 C を引く力 (ベクトル $\mathbf{F}_C$) との合力とバランスしなければなりません。それぞれの力の向きが紐の向きに沿っていなければならないことと、ベクトルの足し算は平行四辺形で表されることを考えあわせると、各紐を引く力の大きさを推定することができます。

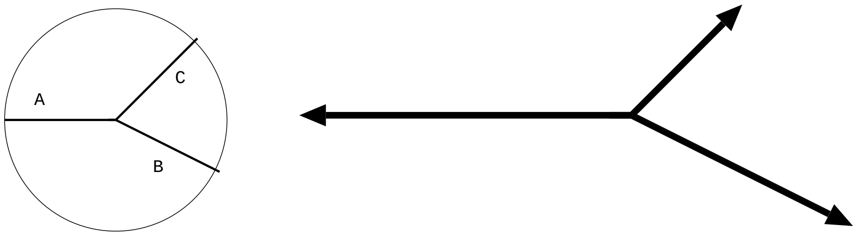


図 8: 三つの力のつりあい

練習問題

1. 三本の紐を結びあわせてみなさい。二人で組になり、その紐の端を互いに引っ張ってみよう。

2.4 風のシアー

場所によって風の速度 (速度ベクトル) が異なることをシアーがあるといいます。風の流れを見ると、例えば、下層で東風 (東から西に向かう流れ)、上層で南風 (南から北に向かう流れ)、ということがあります。このような場合、風は鉛直方向にシアーがあるので、鉛直シアーがあるといいます。

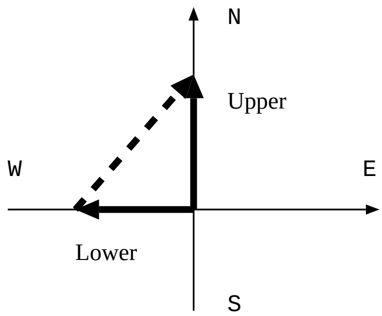


図 9: 風の鉛直シアー

速度は向きと大きさを持つので、ベクトルで表すと都合がいいです。それだけでなく、相対的な速度を考える場合にもベクトルは役立ちます。例えば、下層の流れに乗って上層の流れを見るとどの

[4]三国志で諸葛亮孔明が提案する「天下三分の計」は、おそらく、こうした力学的な考察に基づいていたに違いないと考えている。

ように見えるでしょうか。上の例の場合で考えてみましょう。下層の流れから見ると、静止している物体 (地上の物体) は、すべて、下層の流れとは逆の東へ移動しているように見えます。これと上層の南から北へ向かう流れとをあわせて考えると、上層の流れは、南西から北東に向かう流れのように見えるはずです。このように、ある移動する視点から見た速度を相対速度といいます。
相対速度はベクトルの引き算で表すことができます。上層の速度ベクトルから下層の速度ベクトルを引くと、相対的な速度となるのです。一般に、引き算は、引かれる量を引く量を基準にして考えたときの量を表すと考えられます。例えば、年齢で考えてみよう。39 歳の人の年齢を、19 歳の人の年齢を基準に考えると、20 歳年上である。これは、通常、39-19 という引き算で表すことができます。そして、これは、19 を基準に 39 を見たときに + 20 大きい、とみることができます。速度ベクトルの引き算も同様で、上層の速度ベクトルから下層の速度ベクトルを引き算すると、その結果得られるのは下層の速度で移動するものを基準として、そこからから見た上層の速度になります。

練習問題

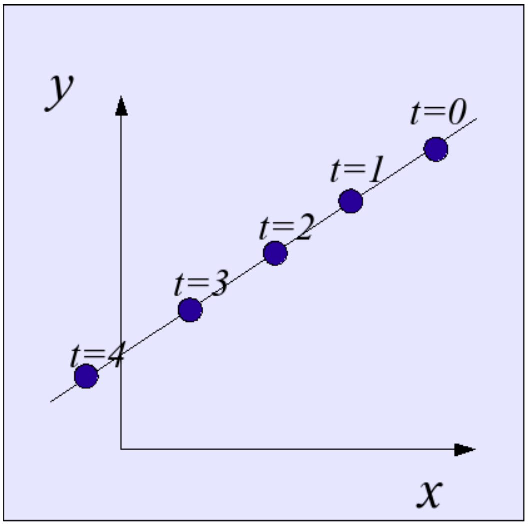
1. 雲の流れの映像を見て、上層と下層の速度をベクトルで表してみなさい。
2. 下層の速度で移動しながら上層の流れを見たときの移動速度を、上記二つのベクトルの引き算で表してみなさい。

3 運動の法則

ニュートンが発見した運動の法則は 3 つあります。ここではそれらについて学習します。

3.1 等速直線運動

直線上を一定の速度で移動する運動を等速直線運動といいます。例えば、テーブルの上に置いたドライアイスを手で押すと、押した後は等速直線運動すると考えられます。
等速直線運動はビデオを用いて表示するとわかりやすいです。しかし、これをビデオのまま人間の頭で処理することは難しいです。そこで、運動の様子をグラフにすることを考えます。例えば、テーブル上の位置を時間の関数として書き表すと、次のようになります (図 10 右)。



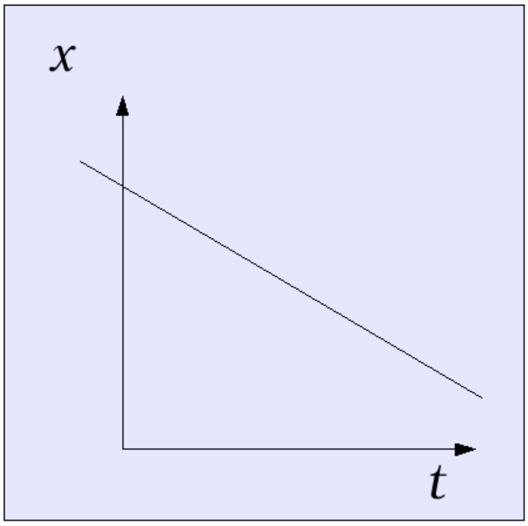


図 10: 等速直線運動

これは丁度、ドライアイスをビデオで撮影した場合、動画の各コマでドライアイスの位置がわかる部分を切り出して、並べたようなものです。このように、等速直線運動は、グラフで直線で表すことができます。
さて、右の図で、速さはどのように表されるでしょうか。この図では、速さは傾きとして表されます。一定の時間が経過 (一定量横軸に沿って移動) した場合に、どれだけの距離進むか (縦軸に沿って移動するか)、を考えると、それは直線の傾きに対応していることがわかります。
それでは、グラフの傾きはどのように表現できるでしょうか。傾きが急だとか、ゆるやかだとかは、よく、角度で表します。この方法は小学校以来、慣れていると思います。しかし、1 回転で 360 度とする、という決め方は合理的ではありません。弧度法 (ラジアン) を使うにしても適当ではありません。それは、角度と速さは比例しないので、扱いにくいのです。もう一つ、もっとよく使われるのは、割合で表す方法です。例えば、交通標識で、急な坂道であることを示す場合に、斜面の傾きを “%” を使って表しています (図 11)。これは、水平方向に 100 [m] 移動した場合に、何 [m] 鉛直方向に移動したかを表しています。
このような考え方はグラフの傾きを考える場合にも使えます。つまり、図 10 で、時間が Δt だけ変化したときに、座標が Δx だけ変化したとき、$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ で傾きを表せようにしましょう。これは、単

位時間当たりの進む距離にあたりますから、速さです。このような傾きの定義ならば、傾きと速さが一致し、好都合です。

図 11: 道路標識

3.2 位置と速度

一般には、速度は時間的に変化します。時間的に変化した場合についても同様に考えてみましょう。こういった場合の傾きはどのように考えることができるでしょうか。一番、簡単には、グラフ上の各点でグラフに接する接線を引き、その傾きをその場所での傾きとする考え方です。では、接線を決めるためにはどうすればいいでしょうか。そして、その接線の傾きを決めるにはどうしたらいいでしょうか。
ある点 (A) のグラフの接線を考えて、その傾きを決めるためには、その点のすぐ近くの点 (B) をとり、A と B を結んでできる直線の傾きを考えれば、求める傾きにとても近いはずです (図 12 左)。そして、B を A に近づければ近づけるほど、A B を結ぶ線は接線に近付きますから、その傾きは

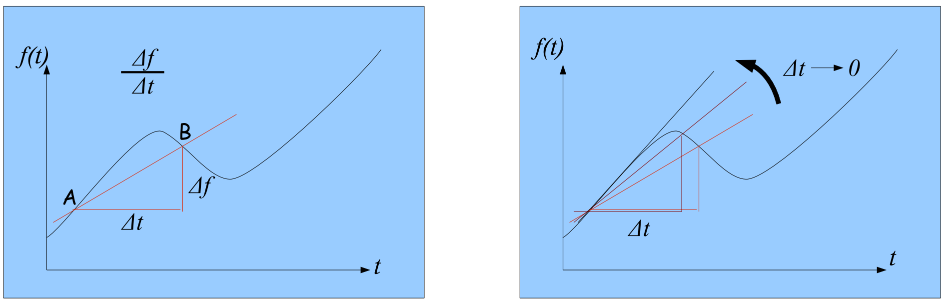


図 12: 点 A 点 B の間を直線で結んだときのグラフの傾き

「A 点での傾き」に近付くはずです (図 12 右)。B を A に近付けた**極限** (B は A と一致はしていないが、両者の間の距離は限りなく 0 に近づけた状態) での傾きを**微分係数**といいます。また、このグラフを与えている関数 $f(t)$ から、微分係数を t の関数として求めることを (関数 $f(t)$ を時間 t で) **微分**するといいます。
こうしたことを簡潔に記号で表した方が扱いやすいので、次のように表記する決まりがあります。こうした表記にも慣れておきましょう。まず、極限についての表記です。「Δx を限りなく 0 に近

づける場合」を

$$\lim_{\Delta x \to 0}$$

で表現します。そして、「Δt を限りなく 0 に近づける場合の $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ の値」を

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

と表します。次に、微分についての記号です。関数 $f(t)$ を t で微分して得られた関数を $\frac{df(t)}{dt}$ あるいは、$\frac{d}{dt}f(t)$ などと表します。普通の分数では、分子にあるものは、かけ算で表すこともできます。それと同様に、微分で上に書いてあるものは、それよりも後ろに書いても構いません。また、t で微分していることから、f は t の関数であることを前提にしていることは明らかです。そこで (t) を省略して、$\frac{df}{dt}$ とも書きます。

このように決めた微分を用いると、速度は位置の時間変化のグラフの傾きに対応していることがわかります。ゆっくり移動する場合にはグラフはあまり傾かず、速く移動する場合には大きく傾くことになります。

傾きには正と負があるように、速度にも同様に正と負があります。物理学では、「速さ」は、速度の絶対値を表すことにし、速度は正負、あるいはベクトルの向きも考えた量をいいます。

3.3 位置と速度と加速度

改めてベクトルとして位置と速度を考えてみましょう。

一般に、位置は位置ベクトルで表すことができます。そして、位置ベクトルは、通常、3 次元です。ある時刻 t の位置ベクトルを $\vec{p}(t)$ とし、Δt だけ時間が経過した時刻 $t+\Delta t$ の位置ベクトルを $\vec{p}\,(t+\Delta t)$ と表すとします。時間 Δt の間の位置ベクトルの変化は、$\vec{p}(t)$ を基準にして、$\vec{p}\,(t+\Delta t) - \vec{p}(t)$ です。ここで、「ベクトルの差を成分」で考えると、それは「ベクトルの成分の差」であったことを思い出しましょう。すると、微分はもともと引き算を使って定義されますから、「位置ベクトルを時間で微分する」とは、位置ベクトルの各成分を時間 t の関数と考えて、その各成分を時間で微分すればいいことがわかります。

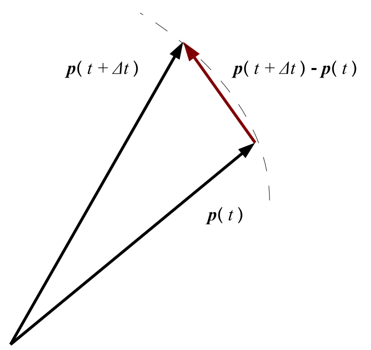


図 13: 位置ベクトルの時間微分を考える

図 13 からわかるように、この二つのベクトルの差は、どこに原点をとっても同じように決まります。そして、そのベクトルは、物体の運動の方向に近い方向を向いているはずです。微分について

解説したときのように、Δt をゼロに近付けてみましょう。すると、ここで考えている差で表現できたベクトルは、ある瞬間の移動の方向に一致するはずです。この時、Δt を十分に小さくするとベクトル $\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)$ の大きさも小さくなります。しかし、微分について学んだことから、これを Δt で割れば、一定の大きさに近付くと予想されます。つまり、$\vec{p}$ を t で微分することができると予想されます。このようにして定義することができるベクトルを**速度ベクトル**あるいは単に**速度**といい、velocity の頭文字をとって v で表すことが多いです。

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{d}{dt}\vec{p}(t)
\end{aligned}
$$

$\vec{p}(t)$ が 3 次元のベクトルで、各成分が $p_x(t), p_y(t), p_z(t)$ である場合、速度ベクトルの各成分 $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ は次のように書けます。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{dp_x(t)}{dt} \\ \frac{dp_y(t)}{dt} \\ \frac{dp_z(t)}{dt} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

一般には、ここまでで考えた速度も時間変化をすることがあるでしょう。そこで、速度の時間についての微分を考えます。そうして微分して得られたものは、速度の変化、すなわち加速や減速を表す度合なので、**加速度**といいます。加速度もベクトル量です。加速度は acceleration の頭文字をとって a とか、ギリシア文字の α を用いて表すことが多いです。

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{d}{dt}\vec{v}(t)
\end{aligned}
$$

同様に成分で表すと次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、速度は座標の時間微分であったことを思い出しましょう。すると、加速度は、座標を 2 回 (数学では、恐らく「2 段階」という意味で 2 階と書きます) 微分したものです。

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_x(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_y(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_z(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$ と何度も書くのは面倒です。そこで、$\frac{d^2}{dt^2}$ のような書き方もします。これを用いれば、

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}p_x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_z(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と、すっきり書けます。
このように微分によって加速度を定義できました。もちろん、一般には、加速度も時間変化しますので、加速度の時間変化を考えることもできますし、更に、加速度の時間変化の時間変化を考えることもできます。しかし、これらについては特に名称もありませんし、これらを扱うこともありません。その理由は、物体の運動について考えるときには、加速度がとても重要であることがわかっているからです。これについては後ほど改めて扱います。

課題

1. $x-t$ それぞれのグラフについて、グラフが表す関数をを微分してできる関数のグラフを中段のグラフに描き入れてみましょう。また、中段のグラフで表される関数を微分してできる関数のグラフを下段に描き入れてみましょう。

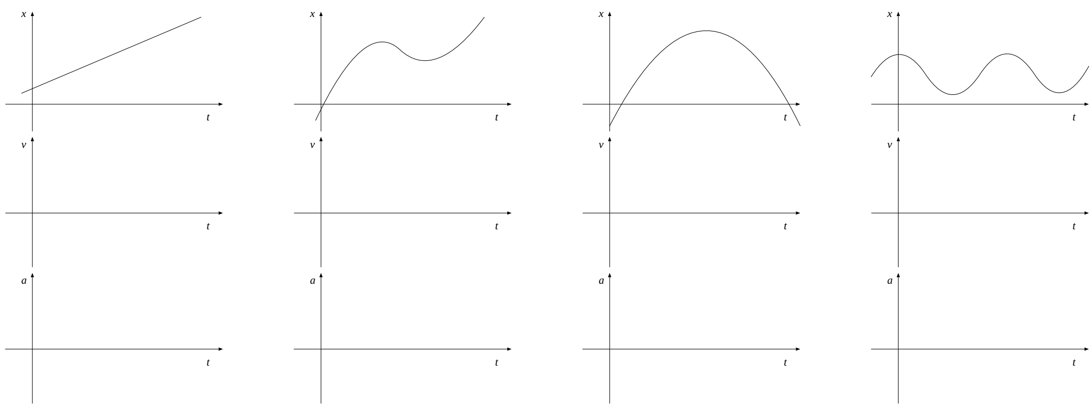


図 14: 微分の練習

3.4 運動の法則

さて、ここまでで運動の様子を表現することができるようになりましたし、運動についての基本的な物理量である座標と速度と加速度についても学習しました。それでは、こうした物理量は、何によってコントロールされているのでしょうか。
昔から、人々は、物体の運動と力とが関係あると考えてきました。しかし、18 世紀頃になると、あいまいだったものをしっかり考えるようになりました。まず、ガリレオは、力が作用しなければ物体はそのままずっと進行しつづけると考えました[5]。この世の中には力が全く作用しないことはあ

[5] 正確には、少し話が違います。万有引力を知らなかったガリレオは、水平面上を運動する物体は、力が作用しなければ地球を一周するだろうと考えました。

りえませんので、これは実際に実験して確かめた訳では無く、頭の中で考えたことです。(このように、頭の中で行う仮想的な実験を「思考実験」と言います。) このように、物体には一度動き出すと、力が加わらない限りそのまま一定の速度で動こうという性質があると考えられます。これを**慣性**といいます。また、力を加えられていない物体が一定の速度で移動すること (等速直線運動すること) を**慣性の法則**といいます。
次に、時間的に変化する物体の運動について定量的に示したのはニュートンです。ニュートンは、物体の速度の変化 (加速度) と力とが関係あることに気づきました。
では、その関係について詳しくみてみましょう。まず、速度の変化 Δv は力 F に比例します。

$$\Delta v \quad \propto \quad F$$

力が加われば、物体はどんどん速くなっていくという訳です。二つ目は、物体の速度の変化は、力を加えつづけた時間 Δt に比例します。長い時間力を加えつづければ物体の速度は大きく変わりましが、短い時間であればそれは少ないです。

$$\Delta v \quad \propto \quad \Delta t$$

三番目に、"重さ" について考えましょう。最初に静止していた物体を動かすことを考えます。静止していたものに速度を与えるのですから、加速することを考える訳です。同じ力を加えても、"重い" 物は動かしにくく、"軽い" 物は動かしやすいです。物体の "重さ" にあたるものを**質量**といいます。そこで、質量 m に対して、加速度は、反比例の関係にあります。

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{1}{m}$$

ニュートンの力学の基礎はこれらの 3 点にあります。これら 3 点について、みなさんは実感が湧くでしょうか。あるいは、何らかの違和感があり、「ちょっとそうかな？」と思うでしょうか。おそらくは、素直に当たり前のことと認めてもらえると思います。
これらをまとめると、

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{F\Delta t}{m}$$

あるいは、

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \propto \quad F$$

となります。ここで、力 F が、時々刻々変化する場合を考えると、ある瞬間についてこのような式が成り立つことを考えるべきです。そこで、Δ がついた量については、微分で考えるべきだということになります。

$$m\frac{dv}{dt} \quad \propto \quad F$$

ここで、ひとつ注意しておきたいことがあります。それは、力の向きと加速度の向きです。これらは一致します。つまり、力が加わった方向に加速度があります。力の向きと速度の向きとは、必ずしも一致しません。例えば、みなさんが走っているときに横から軽くドンと押された場合を考えましょう。みなさんは、少し走り方が横にぶれるかもしれません。これは、押された方向に加速度があるということです。しかし、速度は依然としてほとんどまっすぐであって、押された向きとは異なります。

最後に力の性質についてです。力は、孤独ではなく、必ず相方がいることわかっています。物体 A が物体 B に力を及ぼすとき、逆に、物体 B が物体 A に力を及ぼしています。それだけでなく、その二つの力は大きさが同じで向きが逆です。例えば、重いボールを持っているひとが、そのボールを投げることを考えましょう。ボールは人からの力を受けて運動を始めます。つまり、加速度を得ます。しかし、ボールを投げると、その人は後ろに反り返ります。それは、ボールがその人を押し返しているからです。また、先ほどの、走っている人を横から別の人が押す例では、体重にもよりますが、押した人は押した反動で少し後ろに下がるはずです。これは走っている人に力を及ぼしたのに、走っている人は、意識しないでも押した人に同じ大きさの力を与えているからです。ひとつの力 (これを**作用**といいます) に対して、対 (ペア) になって現れ力を**反作用**といいます。また、このように二つの力がついになって現れることを**作用反作用の法則**といいます。
ここまでの話をまとめましょう。ニュートンの運動の法則は次のように書き表されます。

- 第一法則 (慣性の法則)

  物体に力が作用していなければ、その物体は静止し続けるか、あるいは、等速直線運動を続ける。

- 第二法則 (運動方程式)

  物体に力が作用するとき、その物体の加速度の大きさは加えた力の大きさに比例し、質量に反比例する。加速度の向きは力の向き一致する。

- 第三法則 (作用反作用の法則)

  一つの物体 A が他の物体 B に力を及ぼすとき、B も A に力を及ぼす。これらの力は、(二つの物体を結ぶ直線上に作用し、) 大きさが同じで向きが逆である。

ニュートンの運動の法則は、もっとも基礎的で重要な部分です。是非、十分に理解するようにしてください。

3.5 加速度と速度と位置

運動方程式は、力がわかれば加速度がわかることを教えています。それでは、加速度がわかると何かメリットがあるのでしょうか。
微分を学んだことをもう一度思い返してみましょう。t の関数 $f(t)$ が与えられ、そのグラフを描くことができれば、グラフの各点での傾きを求めることにより、$f(t)$ を t で微分したものが得られました。この逆を考えてみましょう。すなわち、各点での傾きが与えられたとき、もとの関数を復元できるか、という問題です (図 13)。
この図を見ると、時刻 t に応じた (t の関数として) 傾きが与えられれば元のグラフが復元できそうに見えます。しかし、この図から想像できる通り、縦軸に沿った方向にグラフを平衡移動しても、傾きはですから、一つにグラフが決まりません。そこで、例えば、$t=0$ の時の値を決めれば、一通りにグラフが定まることになります (図 16)。
このように、微分とは逆に、傾き (微分) が与えられた時に元の関数を特定する作業を積分といいます。上の例でわかったように、積分する際には、ある時刻の値を与えることで初めて一通りに関数が定まります。通常は $t=0$ での値を与えることが多いので、積分で得られた関数を一通りに定めるための値を「初期値」ということが多いです。

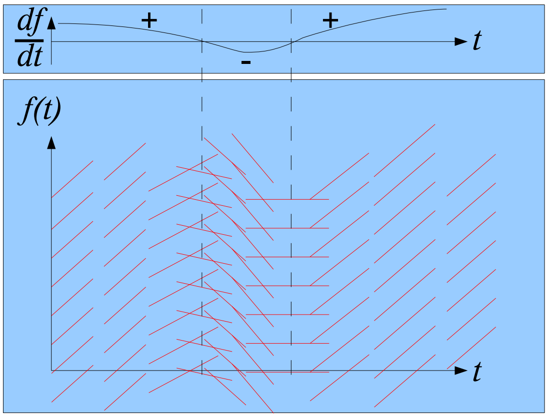


図 15: $f(t)$ の各点での傾きが与えられていること

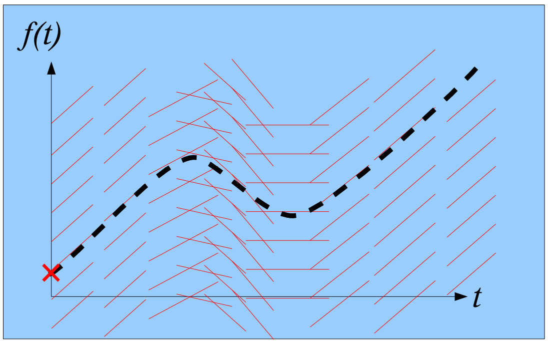


図 16: 傾きから $f(t)$ を決める

話を元に戻しましょう。加速度が与えられた場合、速度の初期値がわかれば、速度がわかります。同様に、速度が与えられた場合も同様です。速度を積分することにより、また、位置の座標の初期値を与えれることで、位置の座標がわかります。

このようにして、力と初期値を与えれば、運動方程式によって、未来の位置と速度を決定することができる訳です。運動方程式の発見は、未来を予知する能力を人間が手に入れた、とも言えると思います。

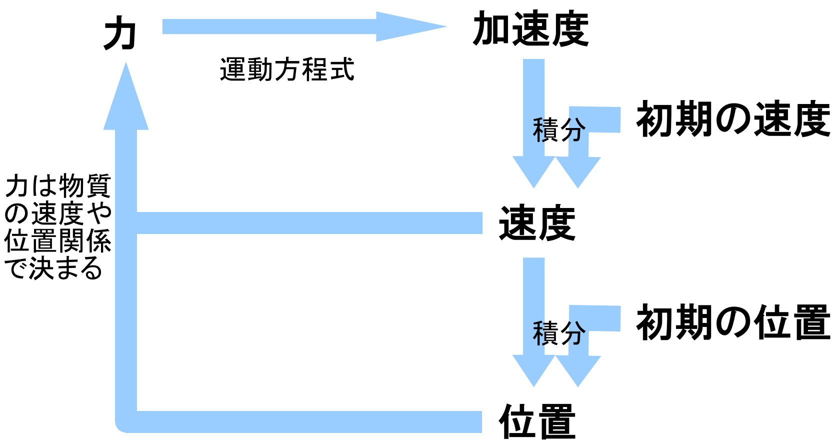


図 17: ラプラス的世界

課題

1. $a-t$ それぞれのグラフについて、グラフが表す関数をを積分してできる関数のグラフを中段のグラフに描き入れてみましょう。また、中段のグラフで表される関数を積分してできる関数のグラフを下段に描き入れてみましょう。

   ただし、$t=0$ で $v=0$, $x=0$ であるとします。

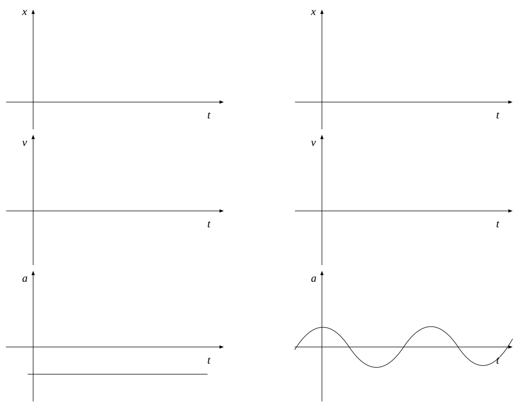


図 18: 微分の練習

3.6　ニュートン力学の与える世界観

運動方程式によって運動が決定するする様子をもう一度詳しくみてみましょう。運動方程式の意味するところは、力が与えられれば、加速度が求まるということです。ところが、加速度は、速度の時間に対する変化率 (変化の割合) であるから、最初の速度がわかると、次の時刻の速度がわかることを意味します。また、速度は、位置の時間に対する変化率ですから、最初の位置がわかれば、次の時刻の位置がわかる、ということになります。ところが、物体に作用する力は、物体の位置関

係がわかれば決まります。そこで、新しい位置関係になったときに作用する力が決まることになります。
ここまでをまとめると、結局、初期の位置と速度が決まれば、それ以降の位置や速度が決まってしまうことを意味しています。
これは何を意味するでしょうか。
世の中にある物質は、全て、分子や原子といった細かな粒子でできています。それは、私達の体も含みます。そうした粒子の運動は、上に述べたように、運動方程式によって決まっていて、現在の状態が決まると、未来の状態も決まってしまいます。ということは、未来は決まっているということになります。そして、もしも宇宙の中の全ての粒子の位置と速度を知ることができて、無限の計算能力を持った者 (これを「ラプラスの悪魔」あるいは「ラプラスの魔」と呼んでいます。) がいたとしたら、その者は、全ての未来の出来事を予知していることになります。これは、決定論的な世界観であると言っていいと思います。
ところが、実際には、様々なことが、人類が予想しない出来事が発生します。それには、いくつかの理由があります。その理由の中のひとつをここで挙げましょう[6]。それは、人間が、全ての初期の状態を知ることができないからです。世界中には膨大な数の原子や分子があります。それらの現時点での位置や運動を、完全に知ることはできません。そこで、そうした私達が知り得なかった情報が原因で、予期しない未来が表れることがあります。そして、もう一つの問題は、たとえ初期の状態を全部知ることができたとしても、それらを元に、運動方程式を解いて、次の状態を知るためには膨大な計算が必要になります。ところが、これを行うことはできません。そこで、ある程度情報を絞って計算することが必要になります。そのために、欠けた情報のために予期しない未来が発生することがあります。
ただ、そうは言っても、決定論的な世界観は、いろいろな場面で私達が信じていることです。例えば、天気予報がうまくいくと思うのは、現在の気象のデータを用いて運動方程式を解けば、未来の気象の状態を知ることができると信じて、それを行っています。また、飛行機や自動車が、安全な乗物として利用できるのは、そのように設計すれば、周りの空気や地面の状態が多少変化しても、うまく飛び、走ることを予知しているからです。そして、予知できる理由は、こうした決定論的な考え方に基づいています。

3.7 運動量の保存

ニュートンの運動の法則の第 3 法則 (作用反作用の法則) を思い出してみましょう。二つの物体 A, B があって、力を及ぼし合っている状況を考えます。すると、作用反作用の法則によって、物体 A が物体 B に及ぼす力 $\mathbf{F}_{AB}$ (ベクトル量) と、物体 B が物体 A に及ぼす力 $\mathbf{F}_{BA}$ とは、向きが逆で、大きさが同じになります。

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

ここで、二つの物体の運動方程式を書いてみましょう。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{BA} &= m_A \mathbf{a}_A \\ \mathbf{F}_{AB} &= m_B \mathbf{a}_B \end{aligned}$$

[6] その他の理由としては、例えば、量子力学でいうところの不確定性原理などが挙げられます

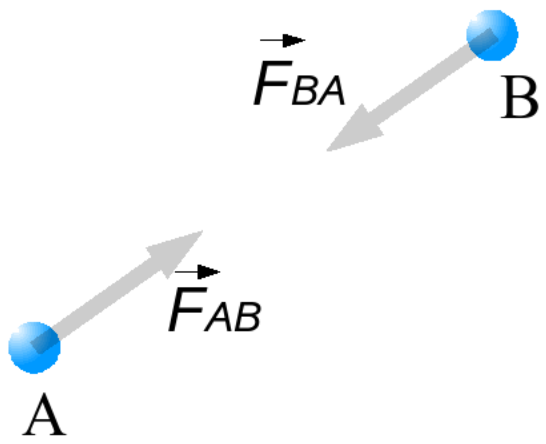


図 19: 作用反作用の法則

作用反作用の関係を一緒に考えながら、これらの二つの運動方程式の左辺と右辺とを足してみます。すると、左辺の合計 $\mathbf{F}_{AB}+\mathbf{F}_{BA}=0$ となります。その結果、次の式が得られます。

$$m_A\mathbf{a}_A+m_B\mathbf{a}_B = 0$$

これからわかることは、二つの物体が相互に力を及ぼし合っている場合には、二つの物体の加速度は互いに無関係ではないということです。加速度が、速度の変化の割合であること、そして、二つの加速度をうまく組み合わせるとゼロになるということは、速度についても情報を与えているはずです。

それを具体的に考えてみるために、ある時間範囲 Δt での速度の変化 $\Delta\mathbf{v}_A, \Delta\mathbf{v}_B$ を考えてみましょう。短い時間範囲で考えれば、加速度を一定とみなすことで、

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \frac{\Delta\mathbf{v}_A}{\Delta t}\\ \mathbf{a}_B &= \frac{\Delta\mathbf{v}_B}{\Delta t}\end{aligned}$$

とすることができます。すると、先ほどの式は、

$$m_A(\Delta\mathbf{v}_A)+m_B(\Delta\mathbf{a}_B) = 0$$

となり、速度の変化の割合についての情報が得られました。初期の速度を、 $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ とすると、Δt だけ時間が経過すると、速度は、$\mathbf{v}_A+\Delta\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B+\Delta\mathbf{v}_B$ となります。これらを考え合わせると、実は、速度については、次のような式が成り立つことになります。

$$m_A\mathbf{v}_A+m_B\mathbf{v}_B = \text{一定}$$

この式の意味することを考えてみましょう。

例 1 宇宙船

宇宙船が宇宙空間にあったとします。燃料がつきて、動けなくなったときに、進行するためにはどうしたらいいだろうか。後向きに弾丸を発射すると、宇宙船の本体は前に進むことになります。それは、作用反作用の法則によって、宇宙船が弾丸を押す力と、弾丸が宇宙船を

押す力が同じだからです。そして、この式の意味するところは、できるだけ重い弾丸 (大きい m_B) を、できるだけ高速 (m_B の絶対値を大きくして) で押し出すと、宇宙船の速さ (v_A) の絶対値が大きくなる、ということです。

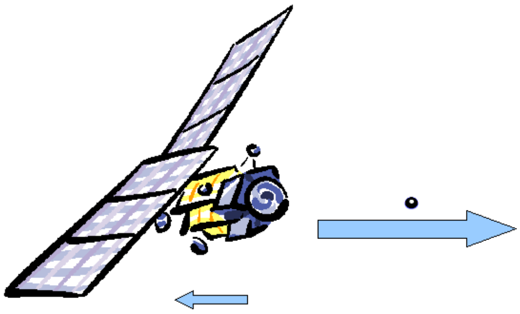


図 20: 宇宙船の運動

例 2 水泳

水泳が前向きの推進力を得ることもこのことと関係しています。抵抗が無視できることを考えましょう。水泳では、自分の周りの水を後ろに押し出すことで自分自身は前向きの速度を得ます。

それでは、ここで、思考実験をしてみよう。宇宙ステーションの中で、空気中で平泳ぎをしてみよう。この時、平泳ぎで前に進むことはできるでしょうか。実際には、前進することはとても難しいです。その理由は、空気と水の密度差にあります。水の密度は、1000 [kg/m^3] 程度であるのに対して、空気の密度は、1[kg/m^3] 程度です (ただし、宇宙ステーションの中の空気の密度は、地上よりもやや低くしてあります。)。そこで、泳ぐことで後ろにかきだす空気の量が、水中で泳ぐ場合と同体積であったと仮定すると、おおよそ、1/1000 程度の質量しか後方に押しやることができず、従って、1/1000 程度しか前方への速度を得ることができません。

例 3 ヘリコプター

地上の物体にもこのような考え方を適用できます。地上の物体は、重力によって、常に鉛直下向きに加速されようとしています。これに対抗して、浮上するには、重力加速度と同じ程度以上の、鉛直上向きへの加速度を得る必要があります。

例えば、体重 (質量)70[kg] の人間が、鉛直上向きに重力加速度と同じ 9.8 [m/s^2] の加速度を得るためにはどうしたらいいでしょうか。その人間が周りの空気を下向きに加速することで上向きの加速度を得ることができます。

$$m_{\text{人間}} a_{\text{人間}} + m_{\text{空気}} a\ \text{空気} \quad = \quad 0$$

に従って考えると、毎秒、70[kg] の静止していた空気 (これは、体積にして、ほぼ、70[m^3], 7 万 [ℓ] の空気) を、9.8m/s に達するように加速する必要があります。空気の量を現実的に 1/10 の 7[kg] にすると、その空気を 98[m/s] に加速しなければなりません。

漫画「ドラえもん」のタケコプターは、これと同様のことを実現したものといえます。また、ヘリコプターは、その質量が、大きいことを除けば、上と同様のことがいえます。

このように、作用反作用の法則を基にして物体の運動を考えると、速度そのものよりも、質量と速度を掛け合わせたもの $m\mathbf{v}$ をひとまとまりだと思った方がよさそうなことに気づきます。そこで、質量と速度を掛け合わせたものに名前をつけ、これを運動量と呼びます。
これまでの議論を、二つ以上の物体に応用することもできます。すると、一般に、物体の集まりを考えて、その物体の集まりの中だけで力を及ぼし合い、外部からの力が作用しない場合には、その物体の集まりの運動量の合計は、一定に保たれることになります。これを運動量の保存といいます。

3.8 エネルギーの保存

アニメや漫画で「エネルギー」という言葉がよく登場しますし、「エネルギー問題」「自然エネルギー」など、社会問題の中でもエネルギーという言葉はよく登場します。
エネルギーという言葉の定義は難しいので、とりあえずの定義をここで書いてみましょう。それは、「最終的に熱になりうる能力」のことです。例えば、床の上に物体が運動していて、それが底面の摩擦によって停止することを考えてみましょう。この場合、速さは徐々に小さくなり、やがて止まってしまいます。しかし、その分、床をこすり、熱が発生します。
このように、運動を止めることによって熱を発生させることができます。熱の発生量が何に対応するかを調べると、

$$\frac{1}{2} \times (\text{質量}) \times (\text{速さ})^2$$

に対応することがわかります。そこで、これを運動エネルギーと呼びます。
今度は高いところ (原点からの高さ h) にある物体が落下する場合を考えましょう。すると、落下しながら速さを増していきます。先ほどと同様に、これは熱に変換することができます。
そこで、高さに応じたエネルギーを考えることができます。これを (重力による) 位置のエネルギーといいます。重力による位置のエネルギーは、次のように表されます。

$$(\text{質量}) \times (\text{重力加速度}) \times (\text{高さ})$$

ここで、重力加速度とは、地球上ではおおよそ 9.8 [m/s^2] です。
このように定義された運動エネルギーと位置のエネルギーを合計して、「力学的エネルギー」と呼びます。
エネルギーには、この他に、音や光に伴った波のエネルギーや、熱エネルギーなどがあります。
エネルギーは、互いに姿を変えて変換するものの、その合計は一定値であることが知られています。物理学では、時間が経過してもある物理量が一定の値を持つ場合、その物理量は「保存する」と表現します。そこで、エネルギーは保存する、といいます。

3.9 慣性力

今度は、運動方程式の応用というよりも、運動方程式がどういうときに成り立つかを考えます。

例えば、電車が発車するときのことを考えましょう。電車に乗っている人は、進行方向と反対方向に力を受けたように感じます。一方、停車するときは、人は進行方向に力を受けているように感じます。
これを電車に乗っていない人から観察してみましょう。発車するときには、電車に乗っている人は静止していたのだから、止まりつづけようとするのは当り前に見えます。また、電車が止まるときには、電車とともに人も進んでいたのだから、そのまま進もうとうするのは当然だと思うでしょう。
これまで考えてきたような普通の状況では、慣性の法則がなりたち、物体は静止しているか、等速直線運動します。このようなことが起こるような座標系を「慣性系」といいます。ところが、電車の場合のように、加速度運動しているような観測者から見ると、状況は違って見えます。そのような観測者は、加速度とは逆向きで、その加速度に質量を掛けたような力が作用しているように感じられます。これは、座標系が加速度運動していることによって現れる「見かけの力」であって、本当の力ではありません。このような見かけの力を、一般に慣性力と言います。
このような慣性力は電車の例の他にもあります。

1. エレベータの中

   エレベータの中でもこのような力を体験します。止まっていたエレベータが上昇を開始する場合を考えましょう。すると、このエレベータの加速度は鉛直上向きです。すると、エレベータに乗っている人は、鉛直下向きの慣性力を受けているように感じます。つまり、体重が重くなったように感じる訳です。

   次に上昇していたエレベータが止まるときを考えましょう。すると、上向きの速度が減っている訳ですから、下向きの加速度をもって運動している訳です。そこで、中にいる人は、上向きの慣性力が作用しているように感じます。つまり、体重が軽くなったように感じます。

2. 回転している場合 – 遠心力

   速さ一定で回転している場合を考えましょう。速さは一定でも、この運動には加速度があることを勉強しました。その加速度は、中心向きでした。そこで、回転している観測者は、外向きの慣性力が作用しているように感じます。これを遠心力といいます。

3. 回転している場合 – 転向力 (コリオリの力)

   回転している場合には、もう一つ別の慣性力が作用します。ここで、思考実験として、まっすぐ進むボールを、回転台にのって観察することを考えてみましょう。すると、ボールには遠心力も作用しますが、それとは別の力が作用し、ボールの軌道が曲がるように感じられます。このような力をコリオリの力 (Coriolis' Force) といいます。運動してる物体に対して速度に垂直に力が作用するので、「向きを転換させる」という意味で、転向力ともいいます。

   コリオリの力は、地球上では気象にとって重要ですので、その作用する向きだけでも覚えておくと便利です。例えば、北半球 (回転軸上から見下ろして、左回りになっている場合) では、進行方向に対して右手に曲がるように作用します。

3.10 角運動量の保存

角運動量 (の大きさ) は次のように定義されます[7]。

$$(\text{質量}) \times (\text{回転半径}) \times (\text{回転の速さ})$$

[7] 角運動量は正確には大きさと向きを持ったベクトル量です。これを定義するには「外積」の考え方が必要です。これはやや難しいので、ここでは省きます。

ここで、「回転の速さ」は、回転中心から質点への位置ベクトルに対して垂直な成分です。

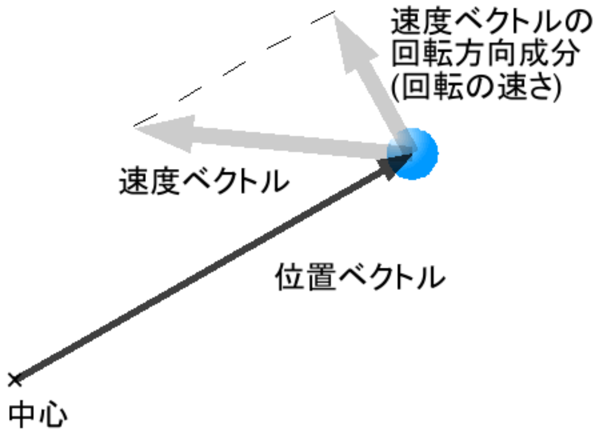


図 21: 角運動量の定義

この角運動量も保存量として知られています。しかし、これが保存するためには条件があります。作用反作用の法則では、二つの物体が力を及ぼし合うとき、二つの力の大きさが同じで向きが逆であるとしました。それには、いろいろな状況がありえます。次の図を見てください (図 22)。どちらも、作用反作用の法則を満たしています。ところが、運動方程式を考えると、力と加速度は同じ向

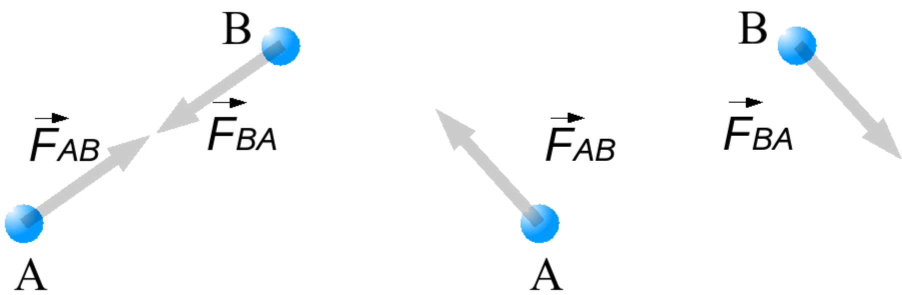


図 22: 角運動量の保存する場合 (左) と保存しない場合 (右)

きですから、右の図では、いかにも回転が始まると予想されます。一方左側の図では、新たに回転が生まれるようには見えません。このように、互いに引き合ったり、互いに反発するような場合に限って、角運動量は保存します。言葉を変えると、力が二つの物体を結ぶ線に沿っている場合 (このような場合に作用している力を「中心力」といいます) に限って角運動量は保存します。ほとんどの場合、作用する力は中心力です。そこで、角運動量は保存します。ところが、いくつかの例では中心力ではありません。そのような場合には注意が必要です。
では、実際に角運動量が保存するような場合の例を考えてみましょう。例えば、回転台の上に乗ってアレイを持った腕を伸ばしたり縮めたりしてみます。すると、回転の速さが変わることが観察されます (図 23)。
このような場合、外部から回転させるような力は作用していません。それなのに、回転の速さを変えることができるのは、角運動量が保存することで説明できます。角運動量 は、(質量) × (回転の

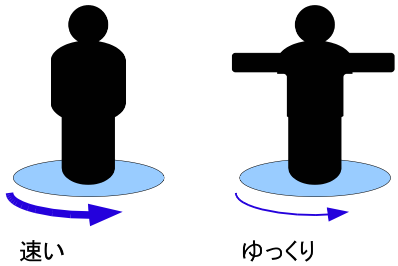


図 23: 角運動量の保存の例:回転台

半径) × (回転の速さ) で表されます。左側は、腕の部分の回転の半径が小さいため、回転の速さが大きくなります。そうして、体の全ての部分の角運動量の合計が一定になるようになっています。一方、右側は、腕の部分の回転の半径が大きいため、回転の速さが小さくなります。フィギュアスケートの選手も、回転の速さを変化させます。その時、注意深く見ると、腕や脚を動かして、回転中心からの距離を変えているのがわかるはずです。
回転台で回転の速さが変化する例は、前に出てきたコリオリの力で説明することもできます。上から見て反時計回りに回転する回転台に人が乗っているとしましょう (ちょうど、地球の北半球にあたります)。その人がアレイを持った手を中心方向に引きよせるとき、このアレイにはコリオリの力が作用します。それは、回転を加速する向きです。こうして、回転台の回転の速さは加速します。逆に、腕を広げるときは減速する向きにコリオリの力が作用します (図 24)。

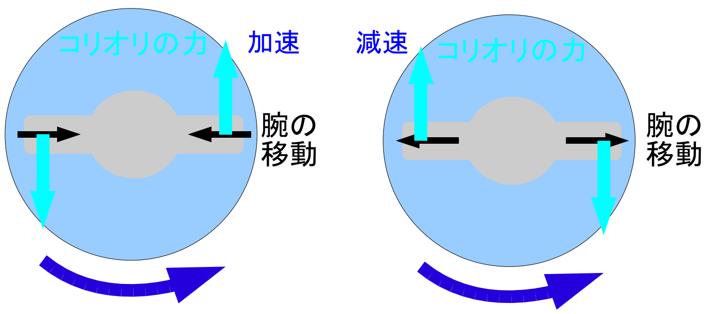


図 24: 回転台の速さの変化のコリオリの力による説明

では、逆に回るときには、腕を広げると加速するでしょうか。そうはなりません。実は、逆回りの時にはコリオリの力の作用する向きが逆になります。結局、どちらの場合でも、腕を広げる減速し、腕を縮めると加速するようになる訳です。

4 熱の科学

4.1 気体の状態方程式と温度

気体の性質を調べると、ほとんどの気体は (圧力が一定ならば)、温度 (Temperature) に比例した体積 (Volume) を持つことがわかりました (シャルルの法則, Charles' Law)。これを見ると、温度を下げていくと (例えば、圧力が一定の下)、体積はどんどん減り、やがてゼロになってしまうことがわかります。
そこで、体積がゼロになってしまうような温度を考え、その温度を絶対零度 (Absolute zero) と名付けました。摂氏 - 273.15 度です。絶対零度から計った温度を絶対温度 (熱力学温度, Absolute Temperature, Thermodynamic Temperature) といいます。その単位は [K] と書き、「ケルビン」と読みます。
また、温度が一定ならば圧力 (Pressure) と体積の積が一定であるとわかりました (ボイルの法則, Boyle's Law)。それらをまとめて、気体の状態方程式が次のように書けることがわかりました。

$$PV = nRT$$

これを理想気体 (ideal gas) の状態方程式 (Equation of state) といいます。
一般に、ある物質について、温度、体積、圧力のうちのどれか二つを決めると、残りの一つは自動的に決まってしまいます。それを表す式のことを、状態方程式といいます。理想気体の状態方程式の特徴は、どんな物質についても、気体であるならば適用できるという点にあります。

4.2 熱とは

これまで、エネルギーについて、「熱になりうるもの」として定義してきました。では、熱とは何でしょうか。
ずっと長い間、高温の物質は「熱素」といような物質を含んでいるのではないか、と考えられてきました。しかし、やがて、熱とエネルギーが同じものであるということがわかってきました。現在では、熱はエネルギーの一つであるということがわかっています[8]。
では、その正体は何でしょうか。皆さんは、物質が分子で構成されていることを知っていると思います。実は、この分子の運動エネルギー (や位置エネルギー) が熱の実体です。以下で、具体的に例を見てみましょう。

1. 単原子分子気体

   1 つの原子だけで分子として期待になっている物質があります。希ガスと呼ばれるもので、ヘリウム (He)、ネオン (Ne)、アルゴン (Ar)、クリプトン (Kr)、キセノン (Xe)、ラドン (Rn) です。

   こうした原子は、互いに引き合わないので、位置エネルギーは (ほとんど) ありません。また、原子は丸いので、回転しません。そこで、重心の運動 (「並進運動」といいます) の運動エネルギーだけが熱エネルギーとなります。

   ところで、並進運動の運動エネルギーは温度と直結しています。そこで、温度に比例した熱エネルギーを持っていると考えることができます。

[8]「熱」そのものについての定義はやや曖昧ですし、人によっても、状況によっても、使われかたが違います。例えば、ある物質が熱エネルギーを持っている、という表現をするときは、物質に内在するエネルギーを指しています。一方で、熱が発生する、といういい方をします。これは、ある物質からその外側に熱エネルギーが逃げることを意味します。その上、人によっても受け止め方がやや異なります。そこで、ここでも、わざと曖昧のまま残しておきます。

2. 二原子分子気体

   酸素や窒素などは、2つの原子が結合してできています。

   分子間で引き合う力は弱いので、この場合も位置エネルギーは無視できます。そこで、運動エネルギーが熱エネルギーであると言えます。ところが、二原子分子の場合には、並進運動の運動エネルギーの他に、回転運動のエネルギーも熱エネルギーとなります。並進運動の運動エネルギーは温度に直結しているのは同じです。そこで、同じ温度でも、単原子分子に比べ、二原子分子の方が、1分子当たりのエネルギーの量は、回転のエネルギーの分だけ多くなります。

   二原子分子の場合、回転の向きは2通りです。三原子分子以上の場合には、3次元的な回転があるので、同じ温度でより多くの熱エネルギーを蓄えることができます。

3. 融解と蒸発

   一般に、固体の物質を温めていくと、融解して液体になります。このとき、一般的には体積が増えます。更に温めると、蒸発 (気化) して更に体積が増えます。これは何を意味しているでしょうか。

   固体が固体でいられるのは、分子が互いに互いを引っ張っているからです (反発しあっていたら、分子は飛び散っていたでしょう)。互いに引き合っている場合、分子間の距離が短い程、位置エネルギーは小さく、距離が長い程、位置エネルギーは大きくなります。これも熱エネルギーの形態の一つです。固体から液体、液体から気体へ状態が変化する時、温めても温度が上がらない現象がよく見られます。加えた熱は、分子間の位置エネルギーとして蓄えられたのです。

   これは、物質を温めると一般に膨張することとも関係しています。個々の分子間の距離が少しずつ広がるので、体積も大きくなるのです。

   水蒸気による火傷 (やけど)

   やかんの水が沸騰して、その口から水蒸気が激しく出ているとき、手を近づけることはとても危険です。水蒸気は 100 ℃以上の高温なので、それが手に触れること自身、長時間触れていると問題になります。ところが水蒸気の場合にはさらに厄介です。
   一つには、水蒸気が 100 ℃以下の物に触れると、まず、そこで、水蒸気が水に変わります。この時、分子間の位置エネルギーが運動エネルギーに変わるので、熱が発生します。また、水蒸気が凝結して水に変わると、体積が減り、ますます近くの水蒸気を集めることになります。こうして激しい勢いで物を熱することになります。
   料理では、「蒸す」という方法でこの仕組を利用しています。

このように、熱の正体は、分子の持つ、運動エネルギーや位置エネルギーであると考えることができます。また、同時に、温度の高低だけが熱エネルギーの大小を決める訳でもないことがわかると思います。
一定量のエネルギーを与えた場合に、どれだけ温度が上昇するかを調べることができます。1度上昇させるのに必要なエネルギー量は、熱容量 (Heat Capacity) と呼ばれています。一般に、物理の世界で、よく、“容量” という言葉が使われますので、その言葉のイメージを持っておくことは重要です。例えば、円筒形の容器を考えて、その底面が大きいことを “Capacity” が大きい、と表現します。容器に水 (エネルギー) を入れたときに、深さ (温度) が 1[cm] (1[K]) 変化するためにはどれくらいの水 (エネルギー) が必要かを考え、それを “Capacity” と表現すると考えてください。

ここまでの話から、熱容量は、物質が多ければ多い程大きいことがわかります。熱容量を物質の特徴としてとらえる場合には、単位質量あたり、あるいは、単位物質量当たりの熱容量を考えるべきです。例えば、水 (液体) の場合、1 [g] の水の温度を 1[K] 高めるための熱量は、1 [cal](カロリー) です。これが、[cal] の定義です。

4.3　熱の仕事当量

力学的なエネルギーは、色々な意味で計測しやすいです。そこで、力学的なエネルギーの量と熱エネルギーの量との対応関係が調べられました。それは、ジュールによって、1[cal] = 4.19[J] とわかった。

人間の発熱量

人間の発熱量は、100[W] 程度であると言われている。これが、食事からもたらされる発熱量だとすると、食事はどれくらい量になるのだろうか。

$$\begin{aligned} & 100[J/s] \times 60[s/min] \times 60[min/hour] \times 24[hour/day] \\ = & \ 8.64 \times 10^6 [J/day] \\ = & \ 2.06 \times 10^6 [cal/day] \\ = & \ 2060 [kcal/day] \end{aligned}$$

4.4　熱と仕事

こうして熱がエネルギーとわかりました。それでは、どのようにすれば、物質 (ここでは気体を考えましょう。) の熱エネルギーを大きくすることができるでしょうか。一つは、気体の入っている容器を小さくすることです。

分子の運動を考えてみましょう。分子は激しく運動しています。それが壁に激突して跳ね返ります。この時、壁が静止していれば、同じ速さで分子が跳ね返ってくることが予想されます。ところが、壁が動いている場合はどうでしょうか。気体分子に向かってくるような場合には、分子の速さは増して跳ね返ってきます。逆に壁が分子から逃げるように動いている場合、分子は遅くなって跳ね返ってきます。

こうした壁の動きは、気体を入れていた容器の大きさを変えることに相当します。分子から遠ざかるように壁を動かすことは体積を増やすこと、分子に向かってくるように壁を動かすことは体積を減らすことに相当します。今、熱の出入りを考えていないので、このような容器の変化は「断熱膨張」「断熱圧縮」といいます。

断熱膨張では温度は低下し、逆に断熱圧縮では温度は上昇します。

この時、同じように膨張しても、単原子分子と多原子分子を比べると、単原子分子の方が温度が下がりやすく、多原子分子の方が温度が下がりにくいです。それは、多原子分子の場合、分子の回転の運動エネルギーも持っていて、それを (温度にかかわる) 並進運動に変換することができるからです。

この断熱膨張は雲のできかたにも関係があります。雲のでき方はいろいろあります。しかし、最も典型的には、断熱膨張によってできます。下層の空気が上昇して、上空へ上がると、上空では気圧が低いものですから膨張します。周りの空気を壁だと思うと、壁が遠ざかったことになり、やはり空気は冷えます。すると、空気中の水蒸気が凝結して雲になります。

5　圧力と静力学平衡

5.1　圧力 (pressure) とは

単位体積当たりの力を一般に応力といいいます。応力を大まかにわけると、圧力と剪断応力があります。このうち、圧力は考えている面に対して垂直に働く力のことをいいます。一方、面に対して垂直でない (面に沿った力) があります。そのような力を、剪断応力 (Stress) といいます。
圧力は単位面積当たりの力ですから、[N/m^2] という単位を用います。この単位は、[Pa](パスカル, Pascal) と表されています。
それでは、この圧力の正体は何でしょうか。
圧力の正体は、ある面に激突する分子の勢い (運動量) が関係しています。簡単のために、気体の周りの壁を考えましょう。その壁に気体分子は激突して、跳ね返ります。この時、分子は壁から力を受けて速度が変化する訳です。と同時に、逆に、分子は壁に力を加えます (作用反作用の法則)。これが圧力の正体です。
では、圧力が分子の壁での激突による速度の変化に関係があるとしたら、圧力は分子の速度に比例するのでしょうか。答えは違います。それは、衝突の頻度 (時間あたり何回衝突するか) も関係しているからです。簡単のために、分子は他の分子と衝突せずに、端から端まで、移動するものと考えましょう。すると、一定時間当たりの壁への衝突回数は、速度に比例します。分子が速いと、すぐに戻ってくるからです。
この二つを考え合わせると、結局、圧力は、分子の速度の 2 乗に比例することになります。ここで、温度が分子の速度の 2 乗に関係していることを思い出しましょう。体積一定であるならば、圧力と温度は比例することになります。これは、シャルルの法則に対応しています。

5.2　静力学平衡

大気や海洋では、下にいくほど圧力が高くなります。それはどうしてでしょうか。それを考えるために、空気の柱を考えましょう。

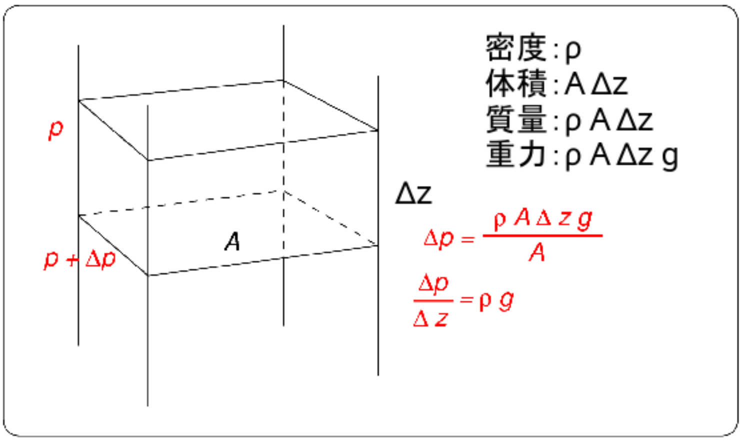


図 25: 静力学平衡を考える気柱

上の面と下の面の圧力の差でその間にある物質に作用する重力を支えます。そこで、下の面の圧力

が高くなります。すなわち、次のようになります。

$$\frac{(\text{上下の気圧差}, \Delta p)}{(\text{高低差}, \Delta z)} = (\text{密度}, \rho) \times (\text{重力加速度}, g)$$

大気と海洋では圧力の変化の様子が違います。

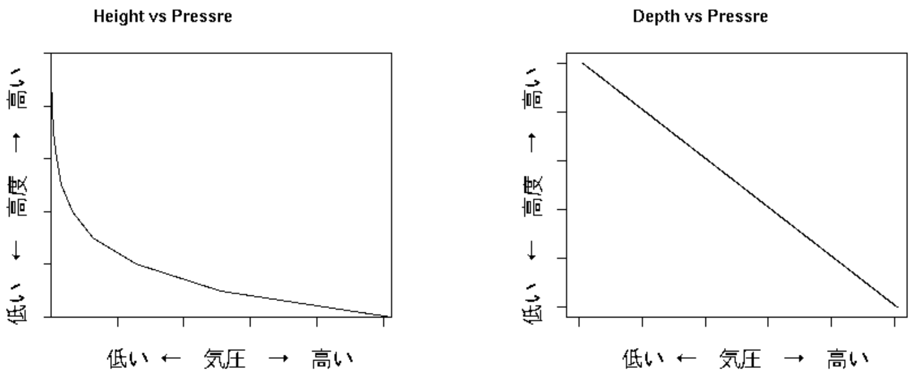


図 26: 圧力分布の違い (左:大気, 右: 海洋)

6　波と流れの現象

波の式と、波の進む向きなどについて話をしました。
波の反射・共鳴・干渉・回折・うなりドップラー効果・衝撃波といった現象などの話をしました。
また、関連して、固有振動の話もしました。
また、カルマンの渦列を実演しました。