物理学概論 講義ノート

平成 20 年 7 月 4 日

目 次

1 はじめに

1.1 桜美林大学の物理学概論

このノートは、桜美林大学の講義である「物理学概論」のために書かれたものです。

桜美林大学の「物理学概論」は、おそらく他学の「物理学概論」とは異なる性質をもっていると考えられます。

理科系の分野を他の大学で学ぶ場合を考えましょう。他学では、既に高校の段階である程度理系の科目に慣れ親しんでいることを前提としていることでしょう。また、受験科目にも理科や数学の科目が並んでいることでしょう。そして、多くの理科系の大学生向けの教科書は多かれ少なかれ、高校で学習する内容を前提にして書かれています。もちろん、文科系向けの物理学の教科書もあります。その場合、高校での履修を前提としていません。しかし、それは、理学を本格的に学習しようとする人向けのものではなく、教養としての物理学に過ぎません。

桜美林大学の場合、新設されたリベラルアーツ学群の理念に則って、新たに物理学概論を準備する必要がありました。リベラルアーツ学群では、まずは 1,2 年生の時にしっかりと教養を高めることが求められます。そして、その後に、大学で専攻する分野を選択してもらいたいと考えています。それは、人文科学系・社会学系などの専門分野だけではなく、数学や理科系の学問分野も含んでいます。そこで、高校で理系科目を十分に学習してこなかった学生も、本格的な理科系の学問を勉強できるための体制を整える必要がありました。

また、実際に開講してからわかったこともあります。それは、本当は理科系の科目に興味を持ちながら、実際には高校の進路指導や、友人関係などのために、文科系クラスに入っていた学生が意外にも多く存在していることです。そうした学生のために、高校で文科系クラスに所属していたとしても、理学を学習するための前段階の科目を整える必要があった訳です。

そこで、桜美林大学では、高校で学ばなかった学生を前提に、本格的に理系科目を学ぶ前段階の科目を設けています。物理学概論は、その一つで、物理学の諸々の科目や、地震学・気象学・天文学を学習すための前段階の科目として位置づけられています。

ただし、その内容は、高校の物理と全く同様ではありません。高校の理科は、大学に進学しない生徒、大学でも文系に進学する生徒を考慮しています。また、履修時期が前後する可能性のある数学 II, 数学 III などの内容を使わないように工夫しています。ところが、数学の一部は物理学と同時に学ぶととても効率的です。それは、物理学によって数学が発達した部分があるからです。そこで、この講義でも数学の内容を積極的に取り込んでいます。語学を学ぶ場合も一つの語学だけを学ぶ

より、複数の言語を同時に学んだ方が効率的だと言われています。数学と物理は、互いに重複する部分もあるので、両方同時に学ぶことはとても効率がいいのです。

この他の役割もあります。例えば、桜美林大学の物理学概論は、情報学や哲学の卒業単位 (メジャーやマイナー) にも認定される科目となっています。物理学の考え方を学ぶことが、物理学以外の分野でも役立つと考えられているからです。更に、物理学概論は、中学校や高校の理科の教員免許を取得するためにも必要な科目となっています。

このような位置づけにある桜美林大学の物理学概論は、やはり、やや特異な性質を持っていると思います。そこで、これまでとは、違った新しいテキストを作る必要を感じた訳です。

この講義の目標は、次の 3 つです。

1. 物理学の言葉に親しむこと

   物理学を学ぶためには、やはりある程度の知識は必要です。そこで、物理学で良く用いられる言葉 (単語や法則も含みます) に慣れ親しむことが必要です。

2. 物理学的な考え方を身につけること

   しかし、覚えることが物理学を学ぶ上で大切なのではありません。もっとも重要なのは、物理学的な考え方を身につけることです。

   ちなみに、残念ながら、高校で学ぶ物理学は「暗記科目」と捉えられているようです。物理学は難しいと敬遠されるために、例えば大学入試センター試験の物理の問題はどんどん易しくなっているように見えます。問題が易しくなると、安易な公式の適用を求める問題が多くなり、その結果、問題のパターンを暗記していれば得点できるようになっているのではないでしょうか。そうだとすると、暗記科目の物理学はますます魅力がないために、ますます敬遠されることになっているのではないでしょうか。これでは悪循環です。

   考えることは面白いことです。様々な対象を色々な側面から考えて、自分なりの発見ができることは、とても楽しいことです。そんな考え方を身につけたいものです。

3. 物理学に対するアレルギーをなくすこと

   上の二つを通じて、物理学に対するアレルギーをなくしていきましょう。

なぜ物理学は難しいか？

「物理学は難しい」という感想をよく聞きます。これにはいくつかの理由があるように思いますし、それぞれには対策があります。私の気づいたことを書いてみます。

- 高校の物理学が難しい

  先にも書いたように、高校の物理学は、大学受験のために、暗記科目になってしまっています。覚えることが苦手な人は、もちろん、この段階で取り残されます。一方、とりあえず暗記して問題が解けることに自信のある人にも問題があります。逆に、ひねりが入って、考えなければ解けない問題は苦手になります。パターン以外は想定外だからです。

  ここでは、覚えることをできるだけ少なくして、基本から考える習慣を身につけたいと思っています。そうすれば状況はかなり改善するのではないでしょうか。

- 積み上げが多い

  他の学問は、途中からでも聞きかじることで何とかその部分を理解できることも多いと思います。しかし、物理学の場合には、基本を理解しないと、いくら後で心を入れ換えて追いつこうとしても、追いつくことが困難です。新しいことは、以前に学んだことを前提にしないと理解できないことが多いです。

  この講義では、そうしたことに慣れてもらうために、できるだけ項目を絞って、基本部分にかける時間を長くしています。その基本とは具体的には、運動方程式です。前半は、運動方程式を理解するための準備であり、後半は運動方程式を用いた応用が多くなります。

- 数式に慣れていない

  運動方程式を学ぶと、以外に日常生活でも体験する感覚と近いと感じると思います。逆に言って、日常的な体験を数式として表したものが運動方程式であると言えます。

  ところが、高校までの生活で、すっかり数式アレルギーになっている人は多いと思います。数学アレルギーにもいろいろな場合があると思います。しかし、私が感じるのは、文字で表された式に、具体的な値を入れて考えることを難しいケースです。

  例えば、質量 m の物質に作用する重力は、重力加速度 g を用いて、mg と表されます。それでは、地球の表面 (重力加速度 9.8 [m/s^2]) で、質量 1 [kg] の物体に作用する重力の大きさはどれくらいでしょうか。この段階で、ここで登場したこれらの言葉の意味はわからなくても構いません。しかし、言葉と記号は対応づけて欲しいと思います。どうでしょうか、1 [kg] $\times$ 9.8 [m/s^2] という式が思い浮かんだでしょうか。

  既にこのようなことに慣れている人は「何を馬鹿にしているんだ」と思うかもしれません。しかし、文字で表して一般化すること、また、このように、一般的な式と具体的なモノを対応づけるて考えること、これらは実は非常に高度な人間の頭の作用です。もしもこの点が苦手だとしたら、自分でこれを意識して練習していきましょう。

1.2 物理学の教科書

物理学の教科書としては、高校向けの物理の教科書を読むことは一つの選択肢です。先ほど書いたように、高校の物理学にはいろいろな制約があります。しかし、いろいろな人の目でチェックされているので、こなれた文章と内容になっています。

もう一つは、「基礎物理学 (第三版)」(原康夫, 学術図書出版, 2006) です。この本は、物理学全般について幅広く書いてあります。物理学は積み上げる部分が大きい学問です。そこで、時々、この先にどのような世界が広がっているのだろうか、と不安になることがあります。そんな時にこの本をめくると、いろいろな話題が目について、遠い先まで見えてくるように感じられるはずです。また、この本は、著者がしっかりと書いているので、信頼して読める本です。

2　物理学とは

2.1　物理学の考え方

それではこれから物理学を学習していきましょう。

まず始めに、これから物理学を学んでいくに際して、物理学とは何かを考えてみましょう。なぜこのような話題からスタートするかというと、一つには、物理学を含む自然科学 (あるいはあらゆる学問全般) は、「定義」を重んじるからです。学問のなかで、議論をすることはとても大切です。しかし、あるテーマについて議論しているのに、考えている対象が人によって異なっていてはまともな議論はできませんね。そのため、ある単語が何をさしているのか、あらかじめ明確にする必要があります。「物理学とは何か」を考えるのは、その練習でもあります。もう一つは、あまりに高校の物理学の視野が狭いからです。高校で学習した物理学は、物理学には違いありません。しかし、内容はかなり限定的です。これまでの物理学の長い歴史の中で、既に研究しつくされたことをなぞっているだけです。もちろん、それは大切なことです。過去に調べられたものを吸収しておくことは、新しい対象を考えるときの道しるべにもなります。しかし、現在の高校の物理学はあまりに窮屈です。これは、わたし自身が大学で地球物理学を勉強した上での感想であり、研究活動を行っての感想であり、更に、改めて高校の物理学を見直した上での感想でもあります。

それでは物理学をどのように考えたらいいでしょうか。日本の物理学者で多くの功績を残した**朝永振一郎**[1]は、「物理学とは何だろうか」[2] の中で次のように述べています。

> われわれを取り囲む自然界に生起するもろもろの現象－ただし主として無生物にかんするもの－の奥に存在する法則を、観察事実に拠りどころをもとめつつ追求すること

このような認識は現在でも変わらないと思います。つまり、まず、物理学を定義することは難しいです。次に、生命そのものを扱うようなものとは、とりあえず一線を引いておく必要もありそうです。そして、この言葉が示しているように、物理学は、「何を」追求するかではなく、「どうやって」追求するか、というところに特徴があるということです。実際、物理学は、いろいろな科学の方法論としてとても広い範囲にいきわたっています。

[1]朝永振一郎先生は日本で二番目にノーベル賞 (ノーベル物理学賞) を受賞した研究者としても知られています。もっとも、ノーベル賞を受賞したからといって偉い人ばかりとは限らないことには注意が必要です。

[2]岩波新書

例えば、私の知ってる物理学者[3]の一人は、水槽の下から泡が出てきた場合に、どのように上昇するかを研究しました。このような泡の対流は、もともとは、大気中の沢山の温かい空気の塊 (「サーマル」と呼ばれています。) による対流を見立てたものです。それを見たイギリスの別の物理学者は、「私は、水の中の微生物の集団的な動きを研究している。その微生物は、水面に上がっていこうとする性質がある。その微生物が水面近くに集まると、その部分が重くなって、下降流が起こる。その様子はあなたの研究とよく似ている。」と言いました。また、別の物理学者は、「地球内部の外核 (液体核) の部分では、鉄が冷えて粒となり、それが下降して内核 (固体の核) に沈んでいる。それに伴って対流が起きている。泡の対流の上昇流は、上下が逆であるが、この現象によく似ている。」と言いました。

この例が示すことは、いろいろな現象の本質的な部分について、共通して語ることができる部分があることです。生命がかかわるような現象でも、また、大変大規模な大気の現象でも、地球内部の現象でも、その本質部分は同じだと考える人がいるということです。ひとつの現象の中に、の中に、それぞれの学者がそれぞれの現象を見ている訳です。そして、ひとつの室内で行う実験で、その本質を追求します。結果が得られれば、それは、色々な方面に応用できることが期待されます。このような考え方、あるいは調べ方の方法は、いろいろな方面に応用ができそうです。

大学の物理学では、このような考え方していきたいものです。そして、こうしたことができるようになるために、大学で本格的に物理学を学ぶための準備をしていきたいと考えています。ただ、限られた時間の中で学ばなければならないことが多いので、必ずしも物理学の考え方について、十分な講義はできません。方法論としての物理学は、別の講義「自然科学基礎 (わたしたちと物理学)」の中で詳しく扱いますので、興味がある人はこちらの講義も受講してください。

この講義では、あまり枝葉の細かい部分には気を払わず、本質的と考えられるようなところ、また、理解しにくいと考えられるところとを重点的に扱います。更に、どうしても何らかの練習も必要になりますので、所々、練習問題を課して、皆さんの実戦的な力も身に着けてもらいたいと考えています。

2.2 物理学の分野

ここまで述べたように、物理学は、その考え方に特徴があります。

ところが、高校までの物理学や、既存の物理学の教科書には、そうしたことはあまり書いてありません。一方で、先に指摘したように、これまでの物理学で得られた成果を中心に書かれています。それは、一つには、物理学の考え方を学ぶ

[3]**木村龍治**先生です。ここでの「物理学者」は、やや広い意味で使っています。本人は物理学者とは名乗らないかもしれません。

ためには、これまでの学問の歴史を知っておくことが重要だからです。また、私達の生活で用いる様々な技術が、こうした過去の物理学の研究の上に成り立っているからでもあります。いずれにしても、過去の研究の成果を知らないことはもったいないことです。

この講義では、物理学の考え方を大切にしながらも、過去の物理学の成果について学んでいくことにします。

初めに、これまでの物理学が、どのような分野に分類できるかを挙げてみましょう。

1. **力学**
   物体に作用する力と運動に関する分野を**力学**といいます。物理学の中で最も早い時期に研究が進みました。

2. **電磁気学**
   電気と磁気に関する分野を**電磁気学**といいます。さらに、この学問分野は二つに大別されます。一つは、**電荷**間に作用する**静電気**による力や**磁石**による**磁力**についての話題です。もう一つは、電気の流れである**電流**に関する話題です。更に、電流に関する話題は、直流と交流に分けられます。電気と磁気の相互作用 (電流が**磁場**は、交流と深い関係があります。

3. **熱力学・統計力学**
   熱は**エネルギー**であると考えることができます。また、物質の**温度・圧力・体積**の間には、ある関係が成り立っています。これらの性質を使うことで、いろいろな物質の性質 (例えば、水の**蒸発熱**の温度変化の性質など) がわかります。こうした話題を扱うのが**熱力学**です。

   こうした性質は、物質が非常に数多くの分子で構成されていること、また、その分子が乱雑に運動していることを前提として理解することができます。このように小さな (ミクロな) 構成要素が数多く集まることで大きな (マクロな) 現象を理解しようとするのが**統計力学**と呼ばれる学問です。

4. **量子力学**
   力学や電磁気学はは私達の身の回りの現象や、天体の運動を考える上でとてもよく機能しました。ところが、非常に速度が大きい場合や、非常に小さい現象の場合には、それまでの力学 (それを**古典力学**といいます) ではうまく説明できない現象があることがわかってきました。

   原子程度よりも小さな現象を扱う場合には、別の枠組を考える必要がありました。**量子力学**はそのようにして生まれた学問です。量子力学の世界では、粒子だと考えていた電子を波として考える必要があったり、逆に波だと考えられていた光を粒子として考える必要があったり、また、観測によって結果が変わったり、と、やや常識とはかけ離れた世界を扱うことになります。

5. **相対性理論**
   一方、非常に高速で運動する物体の場合には、もっと不思議なことが起こります。例えば、高速で運動する宇宙船の中では、地上にいる人からみると、時間がゆっくり進みます。そのような意味では、宇宙船に乗っている人は長生きするように見える訳です。このような現象を扱うのが**相対性理論**です。

   相対性理論の特徴のひとつは、いろいろな現象が理論的に予想され、その後に実験や観察で確かめられたことです。上に書いた時間の進み具合についてもそうでした。そのような意味で、とても興味深い学問分野です。

ここでもう一度強調しておきますが、こうした分野への分類は、これまでの物理学の成果に基づいています。物理学の特徴は、その考え方にありますので、これらの枠に入らない、全く新しい物理学がこれからも誕生していくでしょう。実際、これまでの統計力学の枠組を越えた「複雑系科学」などと呼ばれる研究はどんどん進展しています。これまでの物理学の成果をなぞることは、新しい更にその先の物理学を切り開くための準備であると考えていいでしょう。

3 量と単位

3.1 物理量

ある現象を言葉で表現して人に伝える場合に、**定量的**な表現と、**定性的**な表現とがあります。前者は数値で表すもので、後者は数値を用いずに表すものです。例えば、速さを表すことを考えましょう。定性的に「速い」「遅い」といった表現で速さを表すことも可能です。また、定量的に、「時速 30km」と、数値で表すことも可能です。物理学では、誰でも同じような受けとめ方ができるように、つまり、「**客観的**」に情報が伝わるように、定量的な表現をすることが圧倒的に多いです。

物理学で扱う量は、「**物理量**」といいます。誰が測っても同じになるもの、また、そうした量を基に計算して得られた量が物理量です。物理量は数値と**単位**で構成されます。例えば、「時速 30km」あるいは、「毎時 (まいじ)30km」というのは、「30」という数値と、「km/時」という単位で構成されます。単位は物理量を表すときの基準であるといえます。

3.2 単位

速さは、一定の時間内にどれだけの距離を進んだかで表されますから、時間にどのような単位を用いるか、また、距離にどのような単位を用いるか、によって、速さの単位が変わってきます。速さの単位が時間と距離の単位を組み合わせて作られているように、別の単位から組み合わせて作られる単位があります。そのような単位を**組み立て単位**といいます。一方、組み立て単位に用いるような、基本的な単位を**基本単位**といいます。

では、どのような単位が基本単位でしょうか。どのような単位を基本単位と選ぶかは、流儀によって異なります。しかし、現代の物理学では、ほとんどの場合、**国際単位系 (SI)** を用いることになっています。SI では次の 7 つの単位を基本単位としています。

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)
電流	A	アンペア
温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ

その他の単位は組み立て単位として表します。例えば、面積は m^2 (平方メートル)

です。密度は、単位体積あたりの質量ですから、kg / m^3 (キログラム毎 (まい) 立法メートル) です。

ところが、このような単位だけでは扱いが難しいことも多々あります。例えば、地球規模の現象を考えてみましょう。地球一周の大きさは、およそ 40000000m です。ゼロが多くて扱いが大変です。そこで、次のような**SI の接頭辞**を用いることが多いです。

P	1000000000000000	10^{15}	**ペタ**
T	1000000000000	10^{12}	**テラ**
G	1000000000	10^{9}	**ギガ**
M	1000000	10^{6}	**メガ**
k	1000	10^{3}	**キロ**
h	100	10^{2}	**ヘクト**
da	10	10^{1}	**デカ**
d	0.1	10^{-1}	**デシ**
c	0.01	10^{-2}	**センチ**
m	0.001	10^{-3}	**ミリ**
µ	0.000001	10^{-6}	**マイクロ**
n	0.000000001	10^{-9}	**ナノ**
p	0.000000000001	10^{-12}	**ピコ**
f	0.000000000000001	10^{-15}	**フェムト**
a	0.000000000000000001	10^{-18}	**アト**

例えば、2000m は 2km のように書きます。0.05m は、5cm のように書きます。ただし、習慣によってよく使う場合とあまり使わない場合があります。先ほどの例にあげた地球 1 周の長さは、40Mm ですが、このような表現はあまりしません。40,000 km ということの方が多いです。

物理量には、正確に表現すると単位が無いものもあります。例えば、角度を表現するときの**弧度法**です。角度を表すには、0 度〜360 度まで「度」を用いて表す方法と、半径 1 の円周を考え、その角を中心角としたときの弧の長さ (0〜2π, π は円周率で 3.14159265359⋯) で角度を表す弧度法があります (図 1)。弧度法の単位は**ラジアン**です。しかし、この定義からして、弧の長さと半径との比ですから、本来は単位が無い物理量です。しかし、弧度法で表した角度であることが明確にわかるように、「ラジアン」をつけることが習慣となっています。

また、1 秒間に何回振動したか (これを**周波数**といいます) を表すのに Hz (**ヘルツ**) を用います。例えば、私たちが日常使っている電気 (関東以北の場合) は、1 秒間に 50 回振動しますから、50 Hz と表現します。これも、実際には回/s が単位になります。この「回」も、単に回数を数えただけですから、本来、物理量の単位とは言えませんし、周波数の単位も [1/s] でいいはずです。しかし、他の量と区別す

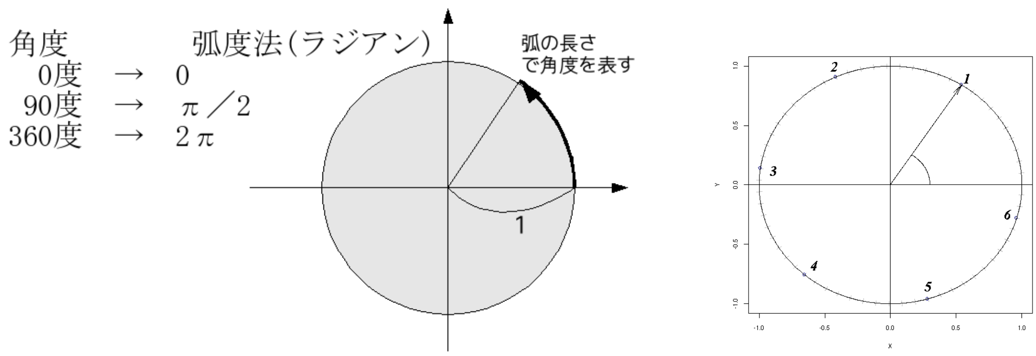


図 1: 弧度法について

るために、[Hz] を用いることが多いです。これは弧度法と同様です。

これらの例のように、やや性質の異なる単位もあるので注意が必要です。

なお、SI 以外の単位系がありますので、それについて触れておきましょう。

1. **MKSA 単位系**

   SI の前身となった単位系です。次の基本単位は SI と共通です。

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)
電流	A	アンペア

   これらの基本単位の頭文字をとって MKSA 単位系と名付けられています。

2. **CGS 単位系**

   次のような量を基本単位としています。

長さ距離	cm	センチメートル
質量	g	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)

   CGS 単位系という名前は、これらの頭文字に由来します。

   歴史が長く、また小型の実験装置を考える場合には具合がいいので今でも利用している物理学者がいます。

最後に単位の書き方についてです。単位は [ ] で囲んで書くことが多いです。以下ではこのルールに従って書くことにしましょう。

課題

1. 光の速さはおおよそ 300000000 [m/s] です。東京–熱海間を 100km とすると、東京から出た光が熱海に到達するにはどれくらい時間がかかるでしょうか。
   ここで、次のような注意をしましょう。
   (a) 単位についても計算が成り立つことに注意しましょう。
   (b) 単位をそろえて計算することに心がけましょう。
   (c) 計算途中でも単位をつけて書くように心がけてみましょう。
2. ある計算機は、1 秒間に 3000000000 回計算できるとします。1 回計算する間に、光はどれくらい進めるでしょうか。
   ここに書いたような数字にも単位をつけて、3000000000 [回/s] とすることができます。

3.3 単位の換算

いろいろな単位が現れると混乱しがちです。そこで、簡単な単位の換算についてはスムースにできるようにしておきましょう。例えば、水の密度を考えてみましょう。おそらく、皆さんの中には、「水 1[ℓ](リットル) がおおよそ 1[kg]」であることを知っている人が多いでしょう。ところが、「ℓ」は SI ではあまり用いない単位です。そこで、これ (1 [kg/ℓ]) を SI らしく [kg/m^3] に換算してみましょう。

そのためには、まず、1[ℓ] が何 [m^3] かを知る必要があります。ところが、皆さんがよく知っているのは、1[ℓ] = 1000 [cm^3] だと思います。そこで、出発点は、体積の換算です。

体積 1[m^3] は、1 辺が 1[m] の立方体の体積です。ところが、1[m] = 100[cm] です。ちなみに、接頭辞 [c] が 0.01 を表すことを考えると、[cm] というのは、0.01 [m] を単位とした長さと考えることができます。

$$
\begin{aligned}
1[\mathrm{cm}] &= 1[0.01\mathrm{m}] \\
&= 0.01[\mathrm{m}] \\
100[\mathrm{cm}] &= 100[0.01\mathrm{m}] \\
&= 100 \times 0.01[\mathrm{m}] \\
&= 1[\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

といった具合です。[0.01cm] という表記は正式のものではありませんが、考え方を説明するために書いてみました。話をもとに戻します。1 辺が 100[cm] の立方体の体積は、100 × 100 × 100 [cm^3] = 1000000 [cm^3] です。これも、

$$
\begin{aligned}
1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1000000[(0.01\mathrm{m})^3] \\
&= 1000000[(0.01 \times 0.01 \times 0.01)\mathrm{m}^3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1000000 \times 0.000001[\mathrm{m}^3] \\
&= 1[\mathrm{m}^3]
\end{aligned}
$$

と考えることができます。($(0.01\mathrm{m})^3$ の部分の計算については後ほど詳しく扱います。) まとめると、次のような関係があります。

$$
\begin{aligned}
1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\mathrm{m}^3] \\
1000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\ell]
\end{aligned}
$$

2 番目の式を 1000 倍すると次のようになります。

$$
\begin{aligned}
1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\mathrm{m}^3] \\
1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1000[\ell]
\end{aligned}
$$

そこで、$1[\mathrm{m}^3] = 1000\ [\ell]$ です。あるいは、先ほどと同様に、考え方を示すための表記として、次のように書いてみます。

$$
\begin{aligned}
1[\mathrm{m}^3] &= 1000[\ell] \\
&= 1000\left[\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3\right]
\end{aligned}
$$

$[\ell]$ という単位が $\left[\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3\right]$ と同じであるとわかるように書いてみました。

次に同じようなやり方で水の密度を考えましょう。

$$
\begin{aligned}
1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\ell}\right] &= 1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3}\right] \\
&= 1\left[1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \\
&= 1000\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]
\end{aligned}
$$

このような計算をしなくても、「$1[\ell]$ で $1[\mathrm{kg}]$ なのだから、$1000[\ell]$ で $1000[\mathrm{kg}]$ で、$1000[\ell]$ が $1[\mathrm{m}^3]$ だから、$1000[\mathrm{kg/m}^3]$」と考えられれば、その方が簡単です。ただ、混乱したときや、面倒な計算をするときには、どのように考えたらいいか、その考え方を身につけておくことは必要です。

課題

空気の密度は、おおよそ 1.2 $[\mathrm{kg/m}^3]$ です。これを $[\mathrm{g}/\ell]$ に変換してみましょう。

3.4　指数法則

単位の換算では、たくさんのゼロ (0) が出てきました。このように沢山のゼロが出てくるような計算では、ゼロの数を数えなければならず、大変です。そこで、最初からゼロの数を書いておいた方が便利です。例えば、1000 を 10^3 と書きます。このような書き方をしたとき、数字の右肩に書く数字を**指数**といいます。正確には、指数は、同じ数を何度かけ合わせるか、を表す数字です。先ほどの場合は、ゼロの数が重要なのではなく、10^3 は、$10 \times 10 \times 10$ を意味するのでゼロの数と一致するのです。例えば 5^3 という書き方では、$5 \times 5 \times 5$ を意味します。

指数には、次のような規則 (指数法則) があります。

1. $A^pA^q = A^{p+q}$

   A を p 回かけ合わせたものと、A を q 回かけ合わせたものとをかけ合わせると、合計で、$p+q$ 回かけ合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

2. $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$

   同様に、A を p 回かけ合わせたものを、A を q 回かけ合わせたもので割ると、合計で、$p-q$ 回かけ合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

3. $A^0 = 1$

   上の法則で $p=q$ の場合、$\frac{A^p}{A^p} = A^{p-p} = A^0$ となりますが、これは 1 です。そこで、$A^0 = 1$ と決めておくと都合がいいです。

4. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$

   $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$ で、$p = 0$ とすると、$\frac{1}{A^q} = A^{-q}$ となります。そこで、このように定義すると都合がいいです。

5. $(AB)^p = A^pB^p$

   A と B の積全体をひとかたまりとして、それを p 回かけ合わせたものは、A を p 回かけ合わせたものと B を p 回かけ合わせたものの積です。

6. $(A^p)^q = A^{pq}$

   A を p 回かけ合わせたもの全体をひとかたまりとして、それを q 回かけ合わせたものは、A を $pq = p \times q$ 回かけ合わせたものです。

7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$

平方根 $\sqrt{A}$ について、$(\sqrt{A})^2 = A$ です。また、$(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$ ですから、$\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$ とすると好都合です。同様に、立方根 $\sqrt[3]{A}$ は、$(\sqrt[3]{A})^3 = A$ ですから、$\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$ です。

このような性質を使うと、特にゼロが多い場合の計算はとても簡単になります。たとえば、

$$\begin{aligned} 10^6[\mathrm{cm}^3] &= 10^6[(10^{-2}\mathrm{m})^3] \\ &= 10^6[10^{-6}\mathrm{m}^3] \\ &= 10^6 \times 10^{-6}[\mathrm{m}^3] \\ &= 1[\mathrm{m}^3] \end{aligned}$$

といった具合です。

4　力学

物理学の長い歴史を考えた時、現代の物理学に直接つながるようなルーツは、誰の研究でしょうか。いろいろな考え方があると思いますが、私は**ガリレオ・ガリレイ**[4]を挙げます。それは、初めて、「仮説を実験で確かめる」という方法を確立した人だからです。ガリレオの研究の中で、最も重要と考えられるのは、物体の運動に関する研究です。ガリレオ・ガリレイの没年、**アイザック・ニュートン**が生まれました。**ニュートン**によって、確立されたのは「**力学**」あるいは「**古典力学**」と呼ばれる学問です。この学問は、**ガリレオ**の研究を進展させ、天体を含む物体の運動を対象とした研究でした。このように、力学は、最初に研究が進められた学問分野です。

また、物理学を勉強すると、力学とは関係のない現象についても、力学で用いた考え方をそのまま適用できる例が数多くあります。そのような意味でも、力学は物理学の最も基礎的な分野であると言えます。

4.1　運動の記述

物理学で扱う様々な量は、物理量として表すことで扱えるようになります。力学の場合には、物体の運動の様子を上手にあらわしてやる必要があります。

4.1.1　座標系

運動の様子を表すには、まず、場所を表す必要があります。では、どのように場所を表したらいいでしょうか。そのためには、まず、基準になる点を決めて、その点からのずれで表現するといいでしょう。その基準になる点を**原点**あるいは**座標原点**と呼びます。

原点からのずれはどのように表したらいいでしょうか。たとえば、原点から東に x[m] 移動し、そこから北に y[m] 移動し、更に上に z[m] 移動するという表現のし方ができそうです。もちろん他にも方法は沢山あります。しかし、このようにする方法はもっとも簡単です。まとめると、次のような方法です。

1. ある地点を原点とする。
2. 原点から東への移動量 x、北への移動量 y、上への移動量 z をとる。

   x と y については、特に東と北でなくてもいいのですが、

   - x, y は水平面内にとり、z は鉛直上向きにとる

[4]最近は小説やマンガ、テレビドラマ等で知名度が高まったようです。

- y が正の向きは x が正の向きの左側 (x が正の向きは y の正の向きの右側) にとる

ようにするのが普通です (図 2 の右側)。

こうすることで、位置を決めることができます。三つの量を与えることで位置が決まるような空間の広がりを**3 次元**といいます。

x の方向に沿った原点を通る直線を x **軸**といいます。x 軸には向きを考えるので、正の向きと負の向きがあります。x 軸上の点の原点からのずれを x **座標**といいます。その点が原点から正の向きにずれていれば x 座標は正で、負の向きにずれていれば、x 座標は負です。

y, z についても同様です。原点と x 軸,y 軸,z 軸 を合わせて**座標系**といいます。

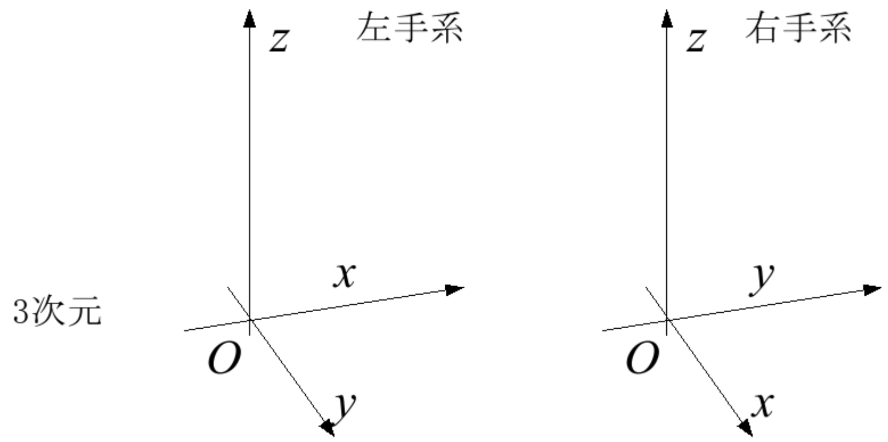


図 2: 座標系 (右手系と左手系)

コラム:右手系と左手系

x 軸と y 軸のとり方について、y 軸の正の向きが x 軸の正の向きの左側になるようにとるのが普通だと述べました。このように設定した座標系を右手系といいます。x, y, z の順に、親指、人差指、中指を対応させることができるからです。x 軸と y 軸を入れ換えると、(普通の人では) 右手で対応させることができず、左手なら同様に対応させることができます。そのような意味で、これを左手系といいます (図 2)。

両者は互いに鏡に写した像のような関係 (鏡像関係) で、3 つの軸を重ねることができません。

私たちは余程の理由が無い限り、右手系を使うことになっています。

4.1.2　位置ベクトル

座標系を決めることで、位置を表すことができるようになりました。x 座標、y 座標、z 座標を書き並べたものを**位置ベクトル**といいます。位置ベクトルは (x, y, z) のように書くこともあります。これは**横ベクトル**として書かれた位置ベクトルです。あるいは、**縦ベクトル**として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書くこともあります。

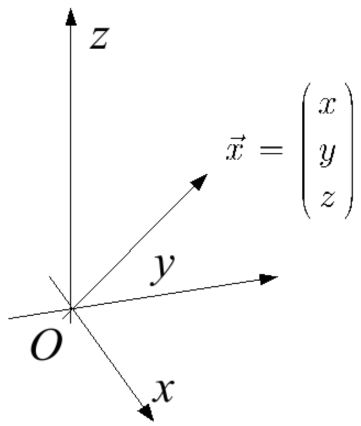


図 3: 位置ベクトル

一般に、図 4 のように大きさに加えて向きを持ったものを**ベクトル**といいます。

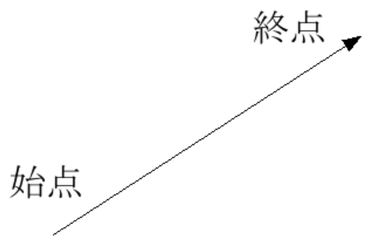


図 4: ベクトル

この図で、矢印で描いたベクトルの根元を**始点**、先端を**終点**といいます。ここで、強調しておきたいのは、ベクトルは始点を選ばないということです。平行に移動して一致する矢印は全て同じベクトルと考えます。

位置ベクトルはベクトルのひとつです。位置ベクトルの場合には、原点を始点として描くのが普通です。ベクトルは上に書いた位置ベクトルと同じように、数

字を書き並べて表すことができます。これらの数字一つ一つを**成分**といいます。あるいは、ベクトル全体を一つの文字で表すこともよくあります。ベクトルでない普通の量 (**スカラー**といいます) と区別するために、太文字にするか、上に矢印をつけます。例えば、

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

あるいは、

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

といった具合です。矢印のようなもの、あるいは、数字の集まりを一つの文字で表すのは変な気がするかもしれません。しかし、このベクトルには演算ができるので、文字で書いておく方が便利なのです。次に、その演算について説明します。

4.1.3 ベクトルの演算

スカラーについて四則演算 ($+, -, \times, \div$) があるように、ベクトルにもいくつかの演算があります。以下では、$\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{q} = (u, v, w)$ とします。

1. スカラー倍

   ベクトルの向きはそのままに、長さを a 倍する演算です。

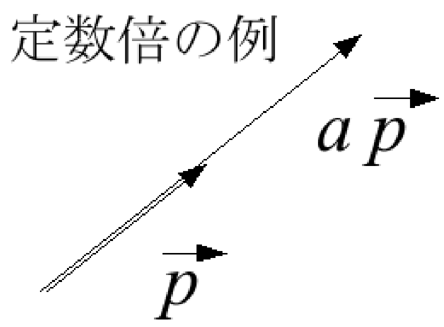


図 5: スカラー倍

成分で書いてみましょう。

$$a\vec{p} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

長さが a 倍になると、各成分も a 倍になります[5]。

2. 足し算

もっとも重要な演算はベクトルの足し算です。

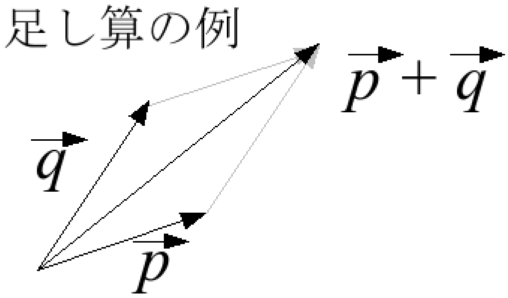


図 6: 足し算

$$\begin{aligned} \vec{p}+\vec{q} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

原点から東、北、上へ、それぞれ x[m]、y[m]、z[m] 移動した地点から、更に東、北、上へ、それぞれ u[m]、v[m]、w[m] 移動した地点を考えます。すると、最終的な到達地点は、原点から東へ $x+u$[m]、北へ $y+v$[m]、上へ $z+w$[m] ずれた点になるはずです。上に示したベクトルの足し算は、このように意味づけられます。

図で表すと、$\vec{p}$の終点と $\vec{q}$の始点を一致させたとき、$\vec{p}$の始点と $\vec{q}$の終点からなるベクトルが $\vec{p}+\vec{q}$ となります。

3. 引き算

足し算が定義できると引き算を定義するのは比較的簡単です。$\vec{r}-\vec{p}$は、$\vec{p}$ を -1 倍してから $\vec{r}$ に加えればいいからです。これは、成分で表すと、成分同士の引き算をすることを意味します。

[5] これは、原点と位置ベクトルの終点を対角とする直方体を考えると、位置ベクトルが a 倍されると、相似比 1:a の 直方体ができることからもわかります。

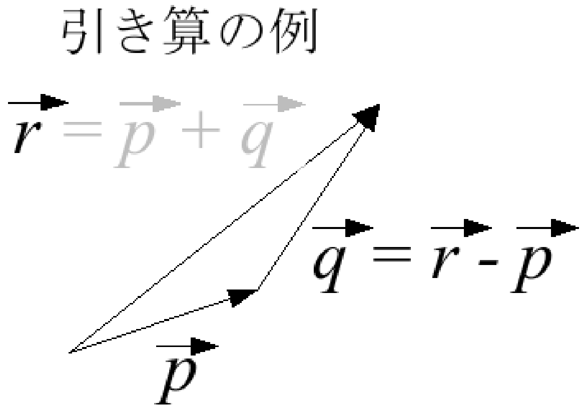


図 7: 足し算

しかし、それでは何のことかよくわかりません。そこで、上で用いた足し算の例を活用したいと思います。$\vec{r}$ を $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$ とします。すると、$\vec{r} - \vec{p} = \vec{q}$ です。

図で、$\vec{r}$ と $\vec{p}$ を位置ベクトルと考えましょう。すると、$\vec{r} - \vec{p}$ が表すものは、「位置ベクトル $\vec{r}$ が表す位置を、$\vec{p}$ の終点を原点として位置ベクトルで表したもの」になっていることがわかると思います。つまり、$\vec{p}$ の終点を基準として $\vec{r}$ の示していた位置を表したものが $\vec{r} - \vec{p}$ となっています。

ここまで、ベクトルの足し算、引き算、スカラー倍を学んできました。成分で見ると、成分同士の足し算であったり引き算であったり、定数倍であったりしますので、それほど違和感は無いと思います。

4.1.4 運動の表現

物体の位置を表すことができるようになりました。それでは、今度は物体の運動をどのように表したらいいでしょうか。運動を表す時のポイントは、場所と時刻です。ある時刻に、物体がどこにあるのか、それがわかれば、物体の運動がわかったことになります。つまり、物体の場所を「時間の関数[6]」として表せばいいのです。私たちが通常、動きのあるものを記録する場合には、よく、ビデオカメラで映像 (動画) として撮影します。時間の関数として、位置を表すとは、正しく、ビデオに録画するような場合です[7]。動画を残すような方法は、運動の様子を記録するにはとても有力な方法です。

しかし、実際に物体の運動を考える場合には、ビデオ撮影は必ずしも都合がい

[6]「y が x の関数である」とは、x が与えられると (決まると)、y が一通りに決まるような関係をいいます。この場合は、時刻が決まると場所が決まることを意味しています。

[7]残念ながら奥行きについての情報は無くなってしまします。しかし、将来は、立体映像を記録し、立体映写機で 3 次元的な映像を映し出すことができるようになるかもしれません。

いとは限りません。一つには、私たちが扱う時間が、例えば 30 億年であったり、1 as (アト秒) であったりするからです。もっとも、これは、時間の縮尺を変えて、早回しで再生したり、逆に、ゆっくり再生すればいいでしょう。別の理由は、私達の脳の働きです。残念ながら、私達の脳は、動画を処理するよりも、静止した映像 (静止画) を処理することに向いているようです。つまり、異なる時刻の状態が一度に見えていないと、運動の様子を上手に理解できません。そこで、時間による変化を 1 枚の画像に納める必要があります。

例えば、朝、家を出てから大学に着くまでの自分自身の運動 (「体操」という意味ではなく「移動」という意味の運動) を考えてみましょう。人間はあまり鉛直方向には移動しませんから、上空から見下ろした地図を描き、その上に、各時刻で自分がいた位置を記していきます。すると、自分の運動が時間の関数として記述できました。いろいろな時刻での場所を、同じ図面の上に描くことで、位置の変化を 1 枚の画像に表すことができました。

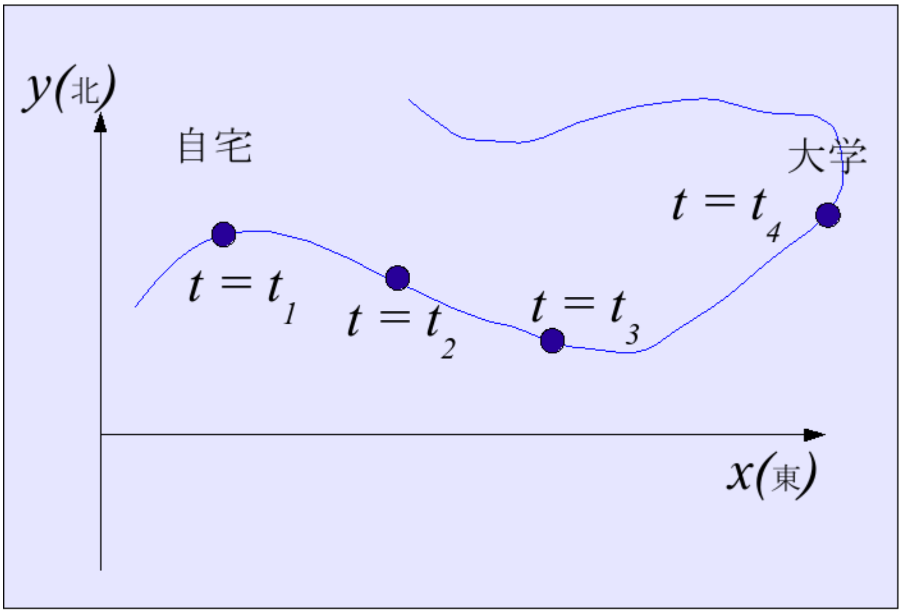


図 8: 自宅から大学までの運動の様子

しかし、定量的に扱うには、もう少し工夫をすることができます。ここで示した表し方では、一定の時間の後にどれだけ移動したか、ということがわかりません。移動した量は見ただけでおおよその見当がつきます。ところが、時間間隔については、いちいち時刻の値を読んで頭の中で計算しなければならず、わかりにくいです。そこで、今度は時刻の変化量も長さとして表してみましょう。例えば、東京駅を出発した新大阪行きの新幹線を例にとって図にしてみましょう (図 9)。このようにすることで、時間の変化量と位置の変化量の両方を見やすくすることができます。

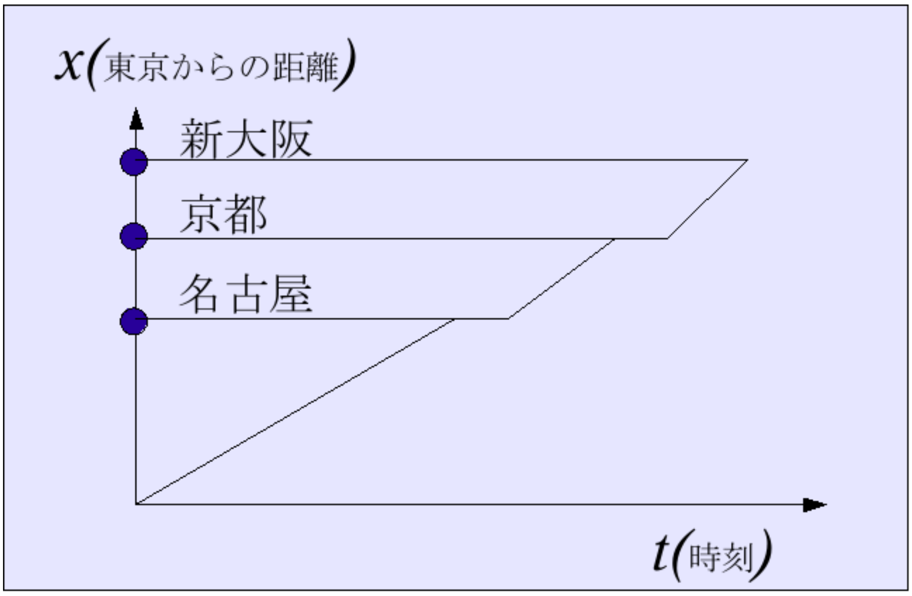


図 9: 時間の関数としての移動距離

しかし、次のような点で注意が必要です。

まず、一つ目は、忘れてならないのは、このような表し方が一面的であることです。新幹線の例では、東京駅と名古屋駅と新大阪駅は直線上にありません。標高も違うでしょう。それを1つの直線で表すことができたのは、本来あるべき多くの情報を削り落とし、「東京駅からの距離」という量だけに絞ったからこそ、可能になったのです。

二つ目は、どのような量に絞るか、です。新幹線の場合には東京駅からの距離が重要です。それが料金に直結しているからです。ところが、実際には複数の量が必要になる場合も多いです。例えば、山手線の窓を開けて、電車で走りながら気温の変化を測る場合には、東西南北、更に高度も含めて、位置の情報が重要になるでしょう。そのような場合には、一つの量だけで代表させるのは難しいです。そして、位置ベクトルの三つの成分それぞれについて、その値と時間の変化をそれぞれ描くことが必要になります。

例えば、ボールを落とすビデオを撮影したときのことを考えます。ボールの高さの時間変化がわかるように、まず、ビデオを構成する画像1枚1枚のボールの移っている部分を切り出します (図10左)。次に、それを横に並べていきます。こうすることで、高さの時間変化がわかります (図10右)。

課題 1

皆さん自身の今朝目が覚めてから大学に到着するまでの運動を、東向きを横軸に、北向きを縦軸にとって図に示してみましょう。

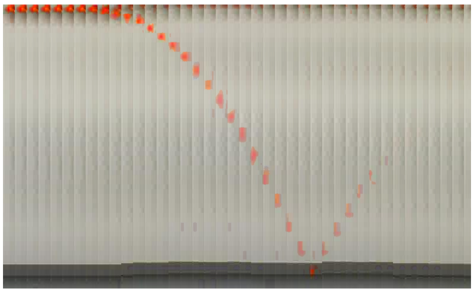



図 10: ボールが落下する様子を移したビデオの一場面 (左) と、各画像からボールの部分を短冊状に切り出した画像を並べたもの (右)

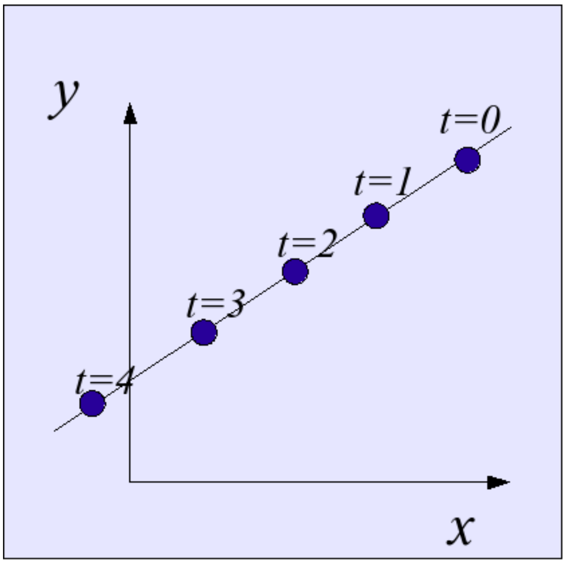
課題 2

横浜線が八王子駅を出てからの様子を、横軸に時刻、縦軸に八王子からの距離をとって図示してみましょう。

以下では練習も兼ねて簡単な運動から考えるようにしましょう。

4.2　等速直線運動

直線上を一定の速度で移動する運動を**等速直線運動**といいます。先に述べた運動の記述のし方にならって、二通りの方法で運動の様子を図にしてみます。



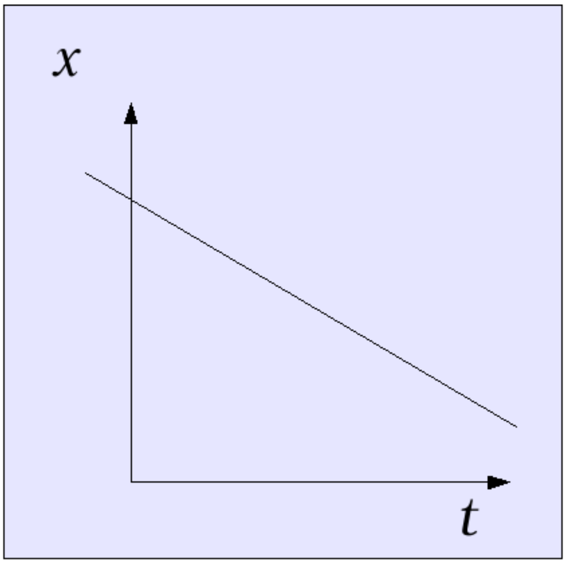


図 11: 等速直線運動

このように二通りで表すことができます。さて、右の図で、速さはどのように

表されるでしょうか。この図では、速さは傾きとして表されます。一定の時間が経過 (一定量横軸に沿って移動) した場合に、どれだけの距離進むか (縦軸に沿って移動するか)、を考えると、それは直線の傾きに対応していることがわかります。

それでは、グラフの傾きはどのように表現できるでしょうか。傾きが急だとか、ゆるやかだとかは、よく、角度で表します。この方法は小学校以来、慣れていると思います。しかし、1 回転で 360 度とする、という決め方は合理的ではありません。弧度法 (ラジアン) を使うにしても適当ではありません。それは、角度と速さは比例しないので、扱いにくいのです。もう一つ、もっとよく使われるのは、割合で表す方法です。例えば、交通標識で、急な坂道であることを示す場合に、斜面の傾きを "%" を使って表しています (図 12)。これは、水平方向に 100 [m] 移動した場合に、何 [m] 鉛直方向に移動したかを表しています。

このような考え方はグラフの傾きを考える場合にも使えます。つまり、図 11 で、時間が Δt だけ変化したときに、座標が Δx だけ変化したとき、$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ で傾きを表せようにしましょう。これは、単位時間当たりの進む距離にあたりますから、速さです。このような傾きの定義ならば、傾きと速さが一致し、好都合です。

図 12: 道路標識

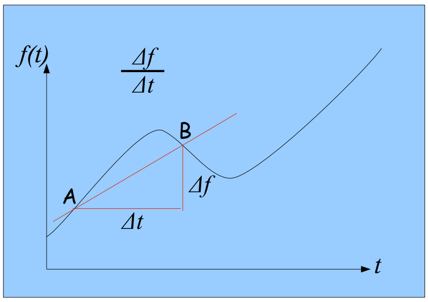
4.3 グラフの傾きと微分

上の例では、グラフの傾きが一定だったのでグラフの傾きを扱うことは簡単でした。しかし、一般的にはグラフは直線ではありません。傾きは、グラフの場所によって変わっています。

こういった場合の傾きはどのように考えることができるでしょうか。一番、簡単には、グラフ上の各点でグラフに接する接線を引き、その傾きをその場所での傾きとする考え方です。では、接線を決めるためにはどうすればいいでしょうか。そして、その接線の傾きを決めるにはどうしたらいいでしょうか。

ある点 (A) のグラフの接線を考えて、その傾きを決めるためには、その点のす

ぐ近くの点 (B) をとり、A と B を結んでできる直線の傾きを考えれば、求める傾きにとても近いはずです (図 13 左)。そして、B を A に近づければ近づけるほど、



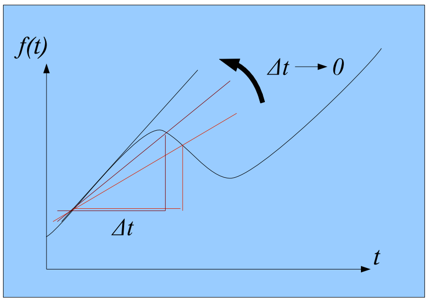


図 13: 点 A 点 B の間を直線で結んだときのグラフの傾き

A B を結ぶ線は接線に近付きますから、その傾きは「A 点での傾き」に近付くはずです (図 13 右)。B を A に近付けた**極限** (B は A と一致はしていないが、両者の間の距離は限りなく 0 に近づけた状態) での傾きを**微分係数**といいます。また、このグラフを与えている関数 $f(t)$ から、微分係数を t の関数として求めることを (関数 $f(t)$ を時間 t で) **微分**するといいます。

以上は、微分の意味です。こうしたことを簡潔に記号で表した方が扱いやすいので、次のように表記する決まりがあります。こうした表記にも慣れておきましょう。まず、極限についての表記です。「Δx を限りなく 0 に近づける場合」を

$$\lim_{\Delta x \to 0}$$

で表現します。そして、「Δt を限りなく 0 に近づける場合の $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ の値」を

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

と表します。次に、微分についての記号です。関数 $f(t)$ を t で微分して得られた関数を $\frac{df(t)}{dt}$ あるいは、$\frac{d}{dt}f(t)$ などと表します。普通の分数では、分子にあるものは、かけ算で表すこともできます。それと同様に、微分で上に書いてあるものは、それよりも後ろに書いても構いません。また、t で微分していることから、f は t の関数であることを前提にしていることは明らかです。そこで (t) を省略して、$\frac{df}{dt}$ とも書きます。

微分 $\frac{df}{dt}$ は、極限で定義されますから、次のような式が成り立ちます。

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \tag{1}$$

課題

1. $x-t$ それぞれのグラフについて、グラフが表す関数をを微分してできる関数のグラフを中段のグラフに描き入れてみましょう。また、中段のグラフで表される関数を微分してできる関数のグラフを下段に描き入れてみましょう。

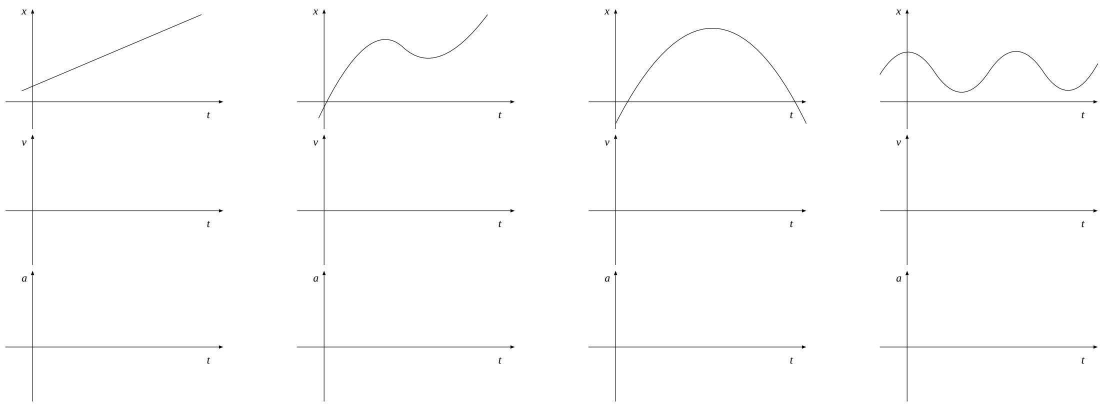


図 14: 微分の練習

4.4　位置と速度と加速度

微分を用いることで、グラフの傾きをきちんと定義することができました。そこで、微分を使って**速度**について考えることにします。

一般に、位置は位置ベクトルで表すことができます。そして、位置ベクトルは、通常、3 次元です。ある時刻 t の位置ベクトルを $\vec{p}(t)$ とし、Δt だけ時間が経過した時刻 $t+\Delta t$ の位置ベクトルを $\vec{p}\,(t+\Delta t)$ と表すとします。時間 Δt の間の位置ベクトルの変化は、$\vec{p}(t)$ を基準にして、$\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}(t)$ です。ここで、「ベクトルの差を成分」で考えると、それは「ベクトルの成分の差」であったことを思い出しましょう。すると、微分はもともと引き算を使って定義されますから、「位置ベクトルを時間で微分する」とは、位置ベクトルの各成分を時間 t の関数と考えて、その各成分を時間で微分すればいいことがわかります。

図 16 からわかるように、この二つのベクトルの差は、どこに原点をとっても同じように決まります。そして、そのベクトルは、物体の運動の方向に近い方向を向いているはずです。微分について解説したときのように、Δt をゼロに近付けてみましょう。すると、ここで考えている差で表現できたベクトルは、ある瞬間の移動の方向に一致するはずです。この時、Δt を十分に小さくするとベクトル $\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}(t)$ の大きさも小さくなります。しかし、微分について学んだことから、これを Δt で割れば、一定の大きさに近付くと予想されます。つまり、$\vec{p}$ を t

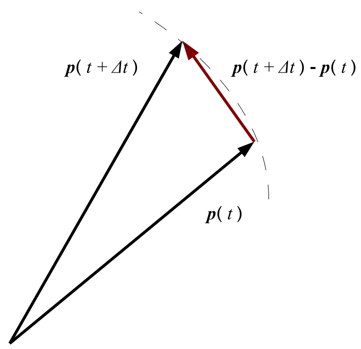


図 15: 位置ベクトルの時間微分を考える

で微分することができると予想されます。このようにして定義することができるベクトルを**速度ベクトル**あるいは単に**速度**といい、velocity の頭文字をとって v で表すことが多いです。

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt}\vec{p}(t)\end{aligned}$$

$\vec{p}(t)$ が 3 次元のベクトルで、各成分が $p_x(t), p_y(t), p_z(t)$ である場合、速度ベクトルの各成分 $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ は次のように書けます。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dp_x(t)}{dt} \\ \frac{dp_y(t)}{dt} \\ \frac{dp_z(t)}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

物理学では速度と**速さ**を区別します。速度が向きと大きさを持っているのに対して、速度の大きさを速さといいます。

一般には、ここまでで考えた速度も時間変化をすることがあるでしょう。そこで、速度の時間についての微分を考えます。そうして微分して得られたものは、速度の変化、すなわち加速や減速を表す度合なので、**加速度**といいます。加速度もベクトル量です。加速度は acceleration の頭文字をとって a とか、ギリシア文字の α を用いて表すことが多いです。

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t)\end{aligned}$$

同様に成分で表すと次のようになります。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、速度は座標の時間微分であったことを思い出しましょう。すると、加速度は、座標を 2 回 (数学では、恐らく「2 段階」という意味で 2 階と書きます) 微分したものです。

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_x(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_y(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_z(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$ と何度も書くのは面倒です。そこで、$\frac{d^2}{dt^2}$ のような書き方もします。これを用いれば、

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}p_x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_z(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と、よりすっきり書けます。

このように微分によって加速度を定義できました。もちろん、一般には、加速度も時間変化しますので、加速度の時間変化を考えることもできますし、更に、加速度の時間変化の時間変化を考えることもできます。しかし、これらについては特に名称もありませんし、これらを扱うこともありません。その理由は、物体の運動について考えるときには、加速度がとても重要であることがわかっているからです。これについては後ほど改めて扱います。

4.5 運動の法則

さて、ここまでで運動の様子を表現することができるようになりましたし、運動についての基本的な物理量である座標と速度と加速度についても学習しました。それでは、こうした物理量は、何によってコントロールされているのでしょうか。

昔から、人々は、物体の運動と力とが関係あると考えてきました。しかし、18 世紀頃になると、あいまいだったものをしっかり考えるようになりました。まず、ガリレオは、力が作用しなければ物体はそのままずっと進行しつづけると考えました[8]。この世の中には力が全く作用しないことはありえませんので、これは実際に実験して確かめた訳では無く、頭の中で考えたことです。(このように、頭の中で行う仮想的な実験を「思考実験」と言います。) このように、物体には一度動き出すと、力が加わらない限りそのまま一定の速度で動こうという性質があると考えられます。これを**慣性**といいます。また、力を加えられていない物体が一定の速度で移動すること (等速直線運動すること) を**慣性の法則**といいます。

次に、時間的に変化する物体の運動について定量的に示したのはニュートンです。ニュートンは、物体の速度の変化 (加速度) と力とが関係あることに気づきました。

では、その関係について詳しくみてみましょう。まず、速度の変化 Δv は力 F に比例します。

$$\Delta v \quad \propto \quad F$$

力が加われば、物体はどんどん速くなっていくという訳です。二つ目は、物体の速度の変化は、力を加えつづけた時間 Δt に比例します。長い時間力を加えつづければ物体の速度は大きく変わりましが、短い時間であればそれは少ないです。

$$\Delta v \quad \propto \quad \Delta t$$

三番目に、“重さ” について考えましょう。最初に静止していた物体を動かすことを考えます。静止していたものに速度を与えるのですから、加速することを考える訳です。同じ力を加えても、“重い” 物は動かしにくく、“軽い” 物は動かしやすいです。物体の “重さ” にあたるものを**質量**といいます。そこで、質量 m に対して、加速度は、反比例の関係にあります。

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{1}{m}$$

ニュートンの力学の基礎はこれらの 3 点にあります。これら 3 点について、みなさんは実感が湧くでしょうか。あるいは、何らかの違和感があり、「ちょっとそうかな？」と思うでしょうか。おそらくは、素直に当たり前のことと認めてもらえると思います。

これらをまとめると、

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{F\Delta t}{m}$$

[8]正確には、少し話が違います。万有引力を知らなかったガリレオは、水平面上を運動する物体は、力が作用しなければ地球を一周するだろうと考えました。

あるいは、

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \propto \quad F$$

となります。ここで、力 F が、時々刻々変化する場合を考えると、ある瞬間についてこのような式が成り立つことを考えるべきです。そこで、Δ がついた量については、微分で考えるべきだということになります。

$$m\frac{dv}{dt} \quad \propto \quad F$$

ここで、ひとつ注意しておきたいことがあります。それは、力の向きと加速度の向きです。これらは一致します。つまり、力が加わった方向に加速度があります。力の向きと速度の向きとは、必ずしも一致しません。例えば、みなさんが走っているときに横から軽くドンと押された場合を考えましょう。みなさんは、少し走り方が横にぶれるかもしれません。これは、押された方向に加速度があるということです。しかし、速度は依然としてほとんどまっすぐであって、押された向きとは異なります。

最後に力の性質についてです。力は、孤独ではなく、必ず相方がいることわかっています。物体 A が物体 B に力を及ぼすとき、逆に、物体 B が物体 A に力を及ぼしています。それだけでなく、その二つの力は大きさが同じで向きが逆です。例えば、重いボールを持っているひとが、そのボールを投げることを考えましょう。ボールは人からの力を受けて運動を始めます。つまり、加速度を得ます。しかし、ボールを投げると、その人は後ろに反り返ります。それは、ボールがその人を押し返しているからです。また、先ほどの、走っている人を横から別の人が押す例では、体重にもよりますが、押した人は押した反動で少し後ろに下がるはずです。これは走っている人に力を及ぼしたのに、走っている人は、意識しないでも押した人に同じ大きさの力を与えているからです。ひとつの力 (これを**作用**といいます) に対して、対 (ペア) になって現れ力を**反作用**といいます。また、このように二つの力がついになって現れることを**作用反作用の法則**といいます。

ここまでの話をまとめましょう。ニュートンの運動の法則は次のように書き表されます。。

- 第一法則 (慣性の法則)

  物体に力が作用していなければ、その物体は静止し続けるか、あるいは、等速直線運動を続ける。

- 第二法則 (運動方程式)

  物体に力が作用するとき、その物体の加速度の大きさは加えた力の大きさに比例し、質量に反比例する。加速度の向きは力の向き一致する。

- 第三法則 (作用反作用の法則)

> 一つの物体 A が他の物体 B に力を及ぼすとき、B も A に力を及ぼす。これらの力は、(二つの物体を結ぶ直線上に作用し、) 大きさが同じで向きが逆である。

ニュートンの運動の法則は、もっとも基礎的で重要な部分です。是非、十分に理解するようにしてください。

4.6 加速度と速度と位置

運動方程式は、力がわかれば加速度がわかることを教えています。それでは、加速度がわかると何かメリットがあるのでしょうか。

微分を学んだことをもう一度思い返してみましょう。t の関数 $f(t)$ が与えられ、そのグラフを描くことができれば、グラフの各点での傾きを求めることにより、$f(t)$ を t で微分したものが得られました。この逆を考えてみましょう。すなわち、各点での傾きが与えられたとき、もとの関数を復元できるか、という問題です (図 16)。

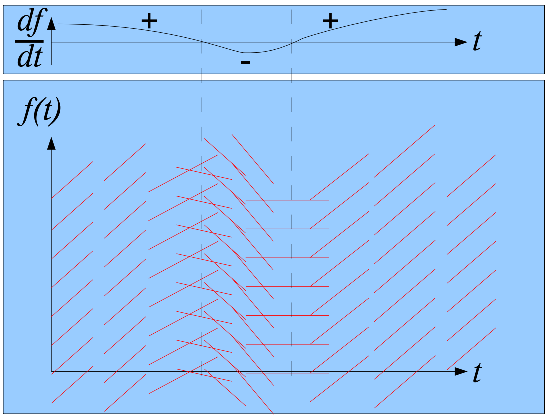


図 16: $f(t)$ の各点での傾きが与えられていること

この図を見ると、時刻 t に応じた (t の関数として) 傾きが与えられれば元のグラフが復元できそうに見えます。しかし、この図から想像できる通り、縦軸に沿った方向にグラフを平衡移動しても、傾きはですから、一つにグラフが決まりません。そこで、例えば、$t=0$ の時の値を決めれば、一通りにグラフが定まることになります (図 17)。

このように、微分とは逆に、傾き (微分) が与えられた時に元の関数を特定する作業を積分といいます。上の例でわかったように、積分する際には、ある時刻の

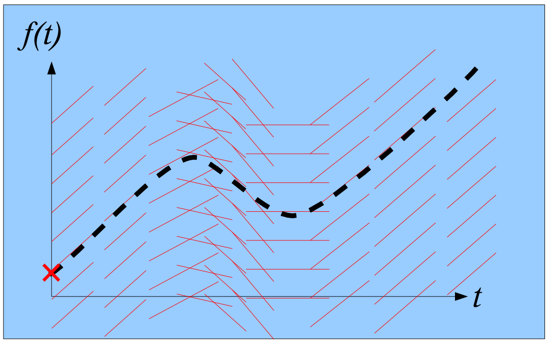


図 17: 傾きから $f(t)$ を決める

値を与えることで初めて一通りに関数が定まります。通常は $t=0$ での値を与えることが多いので、積分で得られた関数を一通りに定めるための値を「初期値」ということが多いです。

話を元に戻しましょう。加速度が与えられた場合、速度の初期値がわかれば、速度がわかります。同様に、速度が与えられた場合も同様です。速度を積分することにより、また、位置の座標の初期値を与えれることで、位置の座標がわかります。

このように定義された加速度がどのようなものか調べるために、ここで、簡単な例を扱います。加速度一定で、直線上を運動する場合にどのような運動になるかを調べてみましょう。直線上での物体の座標を $x(t)$ とします。すると、速度 $v(t)$ は次のようになります。

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

また、加速度は次のようになります。

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d}{dt}v(t) \\ &= \frac{d^2}{dt^2}x(t) \end{aligned}$$

$a(t)=a$ (つまり、a が一定) であるとしたら、代数関数の微分の性質を考えると、$v(t)=at+C_v$ となるはずです。ここで、C_v は定数です。ためしに、これを微分してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(at+C_v) &= \frac{d}{dt}at + \frac{d}{dt}C_v \\ &= a+0 \end{aligned}$$

確かに加速度が一致しました。グラフを縦軸方向に平行に移動しても傾きは変わりません。そこで、決まらない平行移動の分を定数 C_v で表しています。C_v のよ

うに、積分したときに表れる定数を**積分定数**といいます。普通、1 度の積分に伴って、1 つの積分定数が現れます。

このように、微分が与えられたときに、微分する前の元の関数を求める操作を**積分**といいます。今回の場合、定数 a を積分したところ $at+C_v$ になりました。これを次のように書き表します。

$$\int a\ dt \quad = \quad at + C_v$$

記号 $\int$ は**積分記号**といいます。合計を表す summation の頭文字 S に由来しています。"dt" は、t について積分することを表しています。

次に、座標 $x(t)$ についても同様に考えましょう。$v(t) = at + C_v$ の場合には、$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_v t + C_x$ になるはずです。C_x は、新たに現れた積分定数です。これも正しいかどうかを調べるために微分してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}at^2 + C_v t + C_x\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}at^2\right) + \frac{d}{dt}C_v t + \frac{d}{dt}C_x \\ &= at + C_v \end{aligned}$$

確かにこれでいいようです。これも同様に積分で書き表すことができます。次のようになります。

$$\int at + C_v\ dt \quad = \quad \frac{1}{2}at^2 + C_v t + C_x$$

ところで、微分はグラフの傾きとして理解できました。では、積分はどのように理解したらいいでしょうか。それはグラフがつくる面積です。関数 $f(t)$ のグラフを考えてみましょう。原点から $t = t_o$ まで、関数 $f(t)$ のグラフと横軸との間の面積 $S(t_o)$ を考えます。t が $t = t_o$ から $t = t_o + \Delta t$ まで増えたときの面積の変化を考えます。つまり、$S(t_o + \Delta t) - S(t_o)$ を考えます。その変化量は、図から $f(t) \times \Delta t$ にほぼ等しいことがわかります。

$$S(t_o + \Delta t) - S(t_o) \quad \simeq \quad f(t) \times \Delta t$$

これを式変形して、Δt が十分小さい極限を考えてみましょう。その場合には等号が成り立つでしょう。

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_o + \Delta t) - S(t_o)}{\Delta t} \quad = \quad f(t)$$

左辺 (等号の左側) は、微分の定義と同じ形をしています。そこで、次のようになります。

$$\frac{d}{dt}S(t) \quad = \quad f(t)$$

あるいは、積分で書くと次のようになります。

$$S(t) \quad = \quad \int f(t)\ dt$$

積分の最後に書く "dt" は、面積の増加分 $f(t)\Delta t$ の Δt に対応しています。増加分を足し合わせる (合計: summation する) と面積 $S(t)$ になるのですから、積分の書き方の雰囲気を理解できるかもしれません。

4.6.1 等加速度運動

直線に沿った運動で加速度 a が一定の場合を考えます。上の例でも示したように、一般に、その座標は次のように書けます。

$$x(t) \quad = \quad \frac{1}{2}at^2 + C_v t + C_x$$

この二つの積分定数の意味はなんでしょうか。$t = 0$ を代入しましょう。すると、

$$x(0) \quad = \quad C_x$$

となります。そこで C_x は初期 $(t = 0)$ の時の座標を表しています。これを**初期位置**といいます。簡単のために、$t = 0$ の位置を原点にとり直しましょう。すると、$C_x = 0$ とすることができます。C_v の意味について考えるために、$x(t)$ を t で微分して速度 $v(t)$ を求めてみます。すると $v(t) = at + C_x$ です。これに $t = 0$ を代入すれば、

$$v(0) \quad = \quad C_x$$

となり、初期 $(t = 0)$ での速度を表しています。これを**初速**といいます。初期位置と初速をあわせて**初期値**といい初期値についての条件[9]を**初期条件**といいます。

初速度が 0 の場合の等加速度運動の様子を二通りの方法で示してみましょう。初めに、数直線上に物体の位置と時刻を書き込んでみます。

次に、横軸に時間をとって、縦軸に座標をとって図示してみます。

[9]例えば初期値をあたえる式 $C_x = 0$, $C_v = 1$[m/s] などは初期値にあたえられた条件と考えられます。慣れない表現の仕方かもしれません。

コラム：ラプラスの魔 (ラプラスの悪魔)

ここで扱ったニュートンの運動の法則は、力学と呼ばれる分野の核心部分です。特に、運動方程式は重要です。運動方程式が意味しているところを考えてみましょう。

まず、ある質量を持った物体に作用する力がわかっているとしましょう。力は、普通、物体間で作用します。具体的に、物体に作用する力は、万有引力や、電気・磁気の力です。これらは、何がどこにあるか、また、どのように運動しているか、で決まってしまいます (正確には、物体から力を受けるのではなく、「場」から力を受けると考えるべきですし、物体だけでなく、電磁波などの波も考える必要があり、こうしたものによってどのような力が作用するかが決まります)。ですから、最初に物体に作用する力がわかると考えることは、無理なことではありません。

さて、力がわかると、運動方程式によって加速度がわかります。加速度は、速度の時間変化率ですから、速度がどう変化するかがわかります。これに初期の速度を考え合わせると、次の時刻の速度を決定できます。同様に速度は位置の時間変化率ですから、初期の位置がわかれば、次の時刻の位置がわかります。

ところが、いろいろな物体の位置関係や速度が決定すると、各物体に作用する力がわかります。つまり、同様の操作を繰り返すことで、次々と先の時刻の位置や速度を

4.7　等速円運動

コラム：物理「ただ乗り」論?!

物理学の立場からすると、数学で勉強して欲しい部分というのはある程度決まっています。一方、数学の立場からすると、物理で求めている数学は数学の一部に過ぎず、そればかりを注視する訳にもいかないという事情があります。

このような背景の下に、よく、数学の立場から、「物理学の教育は、数学の教育を『ただ乗り』している」という声が上がることがあります。数学には数学の体系があるのに、物理学は自分で必要なところだけを数学に要求している、といった意見です。残念ながら、いつの時代でも、同じような状況が続きましたし、これからも続くでしょう。物理学で必要な数学は、本来は、物理学の中で扱うべきです。

これまで、ベクトル、速度、加速度、といった概念を説明するために、数学の説明もしてきました。これらを扱ったのは、運動方程式をしっかり理解するためにどうしても必要だからです。そして、運動方程式を含む、ニュートンの力学法則は、しっかり理解しなければならないこの講義のテーマだからです。しかし、残念ながら、この物理学概論の時間は非常に限られています。そこで、その他の数学まで十分にカバーすることはできません。また、このような事情を踏まえて、この講義の範囲内では、数学的な部分よりも、基本的な物理学の考え方が身につくように心がけています。是非、皆さんもそれを意識しておいてほしいと思います。

ただ、運動方程式だけは、きちんと理解し、できるだけこれを書けるように心がけてほしいと思っています。そのためには、運動方程式を書くための例題が必要です。等速円運動は、中心向きの加速度の大きさがわかってしまえば、運動方程式を書く例としてふさわしいです。しかし、中心向けの加速度の大きさを考えるためには、三角関数の微分がしっかり学習できていると好都合です。そうでないと、高校の物理で扱うのと同じように、「公式」だと思わなければならなくなります。

ここで扱う等速円運動は、そのような観点からすると、やや難しい話です。理解できる範囲でいいので、とりあえず勉強してみましょう。

円運動の中心を原点にとると、円運動をしている物体の座標は次のように書けます。

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= A\sin\omega t \end{aligned}$$

ここで、A は円運動の半径を表します。ω は定数です。ωt は、時間とともに一定の割合で x 軸から計った角度が増加していることを表しています。このような定数 ω を**角速度**といいます。ここで注意したいのは、物理学では弧度法 (ラジアン) を用いた方がいろいろな面で便利です。そこで、ここでの表記も弧度法になっています。

さて、これを時間で微分すると速度が得られます。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}A\cos\omega t\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}A\sin\omega t\end{aligned}$$

x 成分について、丁寧に計算してみましょう。まず、A は定数ですので、

$$\frac{d}{dt}A\cos\omega t = A\frac{d}{dt}\cos\omega t$$

となります。次に、$\omega t = t'$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A\cos\omega t &= A\frac{d}{dt'}\cos t'\frac{dt'}{dt}\\ &= -A\sin t'\cdot\omega\\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

となります。y 成分についても同様に計算できます。すると、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\omega A\sin\omega t\\ \frac{dy}{dt} &= \omega A\cos\omega t\end{aligned}$$

となります。これが速度です。

加速度は更にこれを微分したものです。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} &= -\omega A\frac{d}{dt}\sin\omega t\\ \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} &= \omega A\frac{d}{dt}\cos\omega t\end{aligned}$$

x 成分について再び丁寧にみていきましょう。なお、表記のしかたですが、$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}$ は、簡単に $\frac{d^2x}{dt^2}$ と書くことが多いですので、この表記を用います。

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega A\frac{d}{dt}\sin\omega t\\ &= -\omega A\frac{d}{dt'}\sin t'\cdot\frac{dt'}{dt}\\ &= -\omega A\cos t'\cdot\omega\\ &= -\omega^2 A\cos\omega t\end{aligned}$$

同様にして、加速度は次のように求まります。

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 A\cos\omega t\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2 A\sin\omega t\end{aligned}$$

この結果を良く見てみましょう。加速度は座標を $-\omega^2$ 倍したものになっています。これは、等速円運動の場合、加速度は常に中心向きで、大きさは $\omega^2 A$ であることを意味しています。これを元に、中心と物体とを結ぶ線上で運動方程式を考えてみると、次のようになります。

$$F = -m\omega^2 A$$

つまり、等速円運動している場合には、中心向きに $m\omega^2 A$ だけの力が作用していなければなりません。この力を向心力といいます。

コラム：第一宇宙速度・第二宇宙速度

ニュートンは、その著書「プリンキピア」に人工衛星の原理を図で示しています。高い山から石を投げると、やがて落下するでしょう。しかし、その投げる速さを大きくすると、次第に落下する地点は遠くに延びていくでしょう。そして、やがて、ある程度の速さに達すると、地球が丸いものだから、地球を一周するようになるでしょう。これが人工衛星の原理です。人工衛星は特にエンジンを噴かしたりすることなく、地球の周囲をぐるぐる回っています。

では、この速度を求めてみましょう。仮りに、質量 M の地球の表面が、半径 R の完全な球で、大気が無いとします。すると、地表面すれすれで地球の周りを周回する人工衛星について、半径方向の運動方程式は次のようになります。

$$V = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

左辺は万有引力の大きさを表しています。右辺は質量と加速度の積です。これを解くと、次の式が得られます。

$$V = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

地球の場合、この値は 約 8 [km/s] となります。地球表面で 約 8 [km/s] で石を水平に投げると (大気が無くて、地球が完全な球ならば)、石は地球を一周して戻ってくる値です。このような速度を、第一宇宙速度といいます。

この値の $\sqrt{2}$ 倍の値 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ は、第一宇宙速度といわれています。この速度で鉛直上向きに打ち出された物体は、星 (地球) から無限に遠いところまで達することができます。

また、第二宇宙速度が光速に達した物体をブラックホールと名付けています。

4.8 運動量の保存

ニュートンの運動の法則のうち、第三法則「作用反作用の法則」を思い出してみましょう。二つの物体があって力を及ぼし合っているとき、その二つの物体に作用する力は、大きさが同じで向きが逆です。次の図で、$\mathbf{F_{AB}}$ と $\mathbf{F_{BA}}$ は大きさが同じで向きが逆です。

図

このことから、どんなことが起こるでしょうか。それを考えるために、物体 A, B について、運動方程式を書いてみます。

$$\begin{aligned}\mathbf{F_{AB}} &= m_A\mathbf{a}_A \\ \mathbf{F_{BA}} &= m_B\mathbf{a}_B\end{aligned}$$

ところが、先ほどの作用反作用の法則から、これらの辺々を足し合わせて力を消去すると、次の式を得ます。

$$0 = m_A\mathbf{a}_A + m_B\mathbf{a}_B$$

加速度は速度の変化率ですから、物体 A,B の短い時間 Δt での速度の変化を $\Delta\mathbf{v}_A$,$\Delta\mathbf{v}_B$ で表すと、

$$0 = m_A\frac{\Delta\mathbf{v}_A}{\Delta t} + m_B\frac{\Delta\mathbf{v}_B}{\Delta t}$$

あるいは、

$$0 = m_A\Delta\mathbf{v}_A + m_B\Delta\mathbf{v}_B$$

という関係式を得ます。速度の変化は独立には決められず、相互に関連があるということです。例えば、m_A が m_B の 10 倍だったとします。すると、$\Delta\mathbf{v}_B$ は $\Delta\mathbf{v}_B$ の 10 倍になる訳です。

更にもう少し考えてみましょう。最初に、速度が $\mathbf{v}_{A0}, \mathbf{v}_{B0}$ だったとします。すると、時間 Δt 後に、$\mathbf{v}_{A0} + \Delta\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_{B0} + \Delta\mathbf{v}_B$ になります。先ほどの式を有効に利用するために、質量と速度の積を考えます。すると、事後の値

$$0 = m_A(\mathbf{v}_{A0} + \Delta\mathbf{v}_A) + m_B(\mathbf{v}_{B0} + \Delta\mathbf{v}_B)$$

は、$0 = m_A\Delta\mathbf{v}_A + m_B\Delta\mathbf{v}_B$ を用いると、

$$0 = m_A\mathbf{v}_{A0} + m_B\mathbf{v}_{B0}$$

となり、事前の値と同じになります。

物理学では、時間的に変化しない物理量によく着目します。そして、時間変化しないことを「保存する」と表現します。今回の場合には、質量と速度の積 (これを運動量といいます) について、物体 A, B の運動量の合計は保存することになります。

このように、力を及ぼしあっている物体の運動量の合計は一般に保存します。これを運動量保存の法則といいます。

ここまでは、「運動量保存」を運動方程式と作用反作用の法則を組み合わせて考えてきました。数学を使うと、その意味が分かりづらくなってしまうことが多いので、

ガンダムは加速できるか

4.9 慣性力

例えば、電車が発車するときのことを考えましょう。電車に乗っている人は、進行方向と反対方向に力を受けたように感じます。一方、停車するときは、人は進行方向に力を受けているように感じます。

これを電車に乗っていない人から観察してみましょう。発車するときには、電車に乗っている人は静止していたのだから、止まりつづけようとするのは当り前に見えます。また、電車が止まるときには、電車とともに人も進んでいたのだから、そのまま進もうとうするのは当然だと思うでしょう。

このように、これまで考えてきたような普通の状況では、慣性の法則がなりたち、当り前のことも、加速度運動しているような観測者から見ると違って見えます。そのような観測者は、加速度とは逆向きで、その加速度に質量を掛けたような力が作用しているように見えます。これは、「見かけの力」であって、本当の力ではありません。このような見かけの力を、一般に慣性力と言います。

このような慣性力は他にもあります。

1. エレベータの中

   エレベータの中でもこのような力を体験します。止まっていたエレベータが上昇を開始する場合を考えましょう。すると、このエレベータの加速度は鉛直上向きです。すると、エレベータに乗っている人は、鉛直下向きの慣性力を受けているように感じます。つまり、体重が重くなったように感じる訳です。

   次に上昇していたエレベータが止まるときを考えましょう。すると、上向きの速度が減っている訳ですから、下向きの加速度をもって運動している訳です。そこで、中にいる人は、上向きの慣性力が作用しているように感じます。つまり、体重が軽くなったように感じます。

2. 回転している場合 – 遠心力

   速さ一定で回転している場合を考えましょう。速さは一定でも、この運動には加速度があることを勉強しました。その加速度は、中心向きでした。そこで、回転している観測者は、外向きの慣性力が作用しているように感じます。これを遠心力といいます。

3. 回転している場合 – 転向力 (コリオリの力)

   回転している場合には、もう一つ別の慣性力が作用します。回転台の上でボールを転がす子供達のビデオを見ると、回転していない人が上から見ると、

ガンダムのパイロットは気絶しないのか

4.10　角運動量とその保存則

角運動量 (の大きさ) は次のように定義されます[10]。

$$(\text{質量}) \times (\text{回転半径}) \times (\text{回転の速さ})$$

ここで、「回転の速さ」は、回転中心から質点への位置ベクトルに対して垂直な成分です。

この角運動量も保存量として知られています。しかし、これが保存するためには条件があります。作用反作用の法則では、二つの物体が力を及ぼし合うとき、二つの力の大きさが同じで向きが逆であるとしました。それには、いろいろな状況がありえます。次の図を見てください。どちらも、作用反作用の法則を満たして意います。

二つ目の図は、いかにも回転が始まるような力が作用しています。

では、実際に角運動量が保存するような場合を考えてみましょう。回転台の上に乗ってアレイを持った腕を伸ばしたり縮めたりすると、回転の速さが変わることが観察されます。これは、フィギュアスケートの選手が回転しながら腕や脚を動かすと回転の速さが変化する時によく観察されることでもあります。このような場合、外部から回転させるような力は作用していません。それなのに、回転の速さを変えることができるのは、角運動量が保存することで説明できます。回転中心からの距離が大きいところに物体があるときにはゆっくり回り、回転中心からの距離が小さいところに物体があるときには早く回ります。この時、回転中心からの距離と回転の速さの積が一定であるようになっている訳です。

これは、前に出てきたコリオリの力で説明することもできます。上から見て反時計回りに回転する回転台に人が乗っているとしましょう。その人がアレイを持っ

[10] 角運動量は正確には大きさと向きを持ったベクトル量です。これを定義するには「外積」の考え方が必要です。これはやや難しいので、ここでは省きます。

た手を中心方向に引きよせると、回転の中心に近づけるとき、このアレイにはコリオリの力が作用します。それは、回転を加速する向きです。こうして、回転台の回転の速さは加速します。逆に、腕を広げるときは減速する向きにコリオリの力が作用します。

では、逆に回るときには、腕を広げると加速するでしょうか。そうはなりません。実は、逆回りの時にはコリオリの力の作用する向きが逆になります。結局、どちらの場合でも、腕を広げる減速し、腕を縮めると加速するようになる訳です。

コマの首ふり運動

回転している車輪やコマには、やや実感しにくい力が作用しています。
…
私達がコマを回すとき、普通、上から見て

5　電磁気学

5.1　力学と電磁気学

これまで、物体の運動と力について学んできました。では、この世の中にはどのような力があるのでしょうか。

ここで、少し、私達が日常体験する力について考えてみましょう。どんな力があるでしょうか。例えば、縮んだバネには伸びようとする力が作用します。バネを構成する1点1点が互いに反発して伸びる運動を起こそうとする訳です。また、私達は椅子に座っています。万有引力が作用しているにもかかわらず、下に落下しないのは、椅子が支えてくれているからです。椅子は体重によって少しだけ変形し、バネと同じように内部に反発する力が作用して体を支えます。

では、摩擦力はどうでしょうか。二つの物体が接触しながら移動すると、互いに互いを引き留めるような力が作用します。そのようにして、エンジンを止めた自動車は、空気の抵抗や車軸の摩擦によって、やがて停止します。

このように世の中には様々な力が作用していますし、作用の仕方も物質によって異なります。ところが、意外なことに、人類が知っている力は、実は、たったの四つしかありません[11]。それは次の四つです[12]。

1. 万有引力
2. 電磁気力
3. 強い相互作用
4. 弱い相互作用

ところが、これらの力のうち、「強い相互作用」と「弱い相互作用」については、やや不自然な名前の付け方であると思いませんか？実はこの二つの力は、原子の内部、特に原子核の中でだけ表れる力です。他の力に対して発見されてからの歴史が短く、そのような意味では、私達の日常生活とは縁遠い力です。すると、逆に言えば、私達が日常意識することができる力は、万有引力と電磁気力だけになります。

再びバネの反発の力や摩擦力などについて考えてみましょう。これらの力については、万有引力はあまり関係ありません。想像してみてください。地球ほどの大きな物体が相手の場合に初めて皆さんの体重を実感させるような万有引力が作用

[11] もし、超能力に関する現象などが実在するとしたら、他にも力はあるのかもしれません

[12] これら四つも、実は一つの力が別々の側面を見せているのに違いないと考えた人々がいました。アインシュタインもその一人です。そして、現在でも様々な研究者が新たな理論を展開しています。私は詳しくありませんが、「超弦理論」はその例です。

するのです。自動車やバネにそれほどの万有引力が存在するとは思えません。すると、結論は、こうした生活で実感する力の実態は、電磁気力であるということになります。

では、電磁気力が具体的にどのようにバネの反発や空気の抵抗になるのでしょうか。物質は分子や原子で構成されていることは知っていることと思います。原子の構造は正 (プラス) の電荷を持った原子核と、それを取り巻く負 (マイナス) の電荷を持った電子で構成されます。両者は電気の力で結び付いています。ところが、物体を変形すると、その分子や原子の構造に歪みを生じ、電気的なバランスが崩れ、力が生じます。これがバネの力の正体です。また、分子や原子は常に運動 (固体の場合には振動) しています。振動しているもの同士が接触していると、互いに衝突しあいます。前面から激しい雨が斜めに降ってくると人の体が押されるように、振動しながら運動している物体は、他方の物体に運動させるような作用をもたらします。いわば、運動量の交換です。これが摩擦力の正体です。ところが、分子の衝突の際に起こることは、やはり、分子や原子の構造に歪みが生じて電気的なバランスが崩れて力が生じる現象です。このように、電磁気力は、特に私達の身の回りに存在する力なのです。

更に、人間は、これらの力を純粋に取り出して利用することを始めました。電気をつかって様々な家電製品を利用しています。こうして電磁気力は一層重要なものになってきました。これから電磁気力について考えていきましょう。

5.2　クーロンの法則

電磁気力の中で最も初期に発見されたのは電荷間の力 (静電気の力) です。古代ギリシアの時代には既に発見されていました。いくつかの物質の組合せから、正電荷と負電荷があり、異なる電荷同士が引き合い、同じ電荷同士は反発しあうことがわかりました。

これを定量化したものがクーロンの法則です。電荷間に作用する力について次のように表されることがわかりました。

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

F_{12} : 二つの電荷 1,2 の間に作用する力
r_{12} : 二つの電荷 1,2 の間の距離
q_1, q_2 : 二つの電荷 1,2 の電荷量
ε_0 : 定数 (真空の誘電率)

ここでいくつか注意があります。まず、電荷の間の距離 r_{12} が式中にあります。これは、電荷の大きさが無視できることを前提としています。このように大きさ

を無視した電荷を**点電荷**といいます。電荷量にはクーロン ([C]) という単位を用います。比例定数である ε_0 は、真空の誘電率と呼ばれています。名前からわかるように、電荷の間が真空でない場合には、別の定数を用いる必要があります。最後に、力の向きについてです。この式では二つの電荷間の力の大きさを表していますが、作用する方向は二つの点電荷を結んだ線に沿っており、同じ符号ならば反発する力 (斥力)、異なる符号ならば引き合う力 (引力) となります。

さて、この表式は、万有引力の表式と良く似ています。

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

F_{12} : 二つの物体 1,2 の間に作用する力
r_{12} : 二つの物体 1,2 の間の距離
m_1, m_2 : 二つの物体 1,2 の質量
G : 万有引力定数

万有引力の場合にも、力の作用する向きは二つの物体を結ぶ線に沿った方向です。ただ、斥力となることはなく、必ず引力となります。

磁気についても全く同様の式が成り立ちます。

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

F_{12} : 二つの磁荷 1,2 の間に作用する力
r_{12} : 二つの磁荷 1,2 の間の距離
m_1, m_2 : 二つの磁荷 1,2 の磁荷量
μ_0 : 定数 (真空の透磁率)

同様の式なので説明は省略します。この式は「磁気の場合のクーロンの法則」とも言われています。磁荷はウェーバー ([Wb]) という単位で表します。ただし、磁気について注意しなければならないのは、磁気については「単極子」が存在しない (発見されていない) ことです。電荷については、プラスの電荷を持った原子核や、マイナスの電荷を持った電子のように、片方の電荷だけを持った粒子が存在することがわかっています。しかし、N 極だけの磁荷、あるいは S 極だけの磁荷を持った粒子は発見されていません。

5.3 電場

さて、電気の力についても磁気の力についても、万有引力についても同様に記述できることがわかったので、これら三つについてまとめて考えてみましょう。と

りあえず、この三つの代表として、電気で考えることにします。

ある一つの電荷 (電荷量 q_0) だけが存在したとします。もしも、もう一つの別の電荷があったとしたら力が作用することになります。しかし、今はそれがないので、何も力が働かない状態を考えます。このとき、もう一つの別の電荷が存在したのならば力が作用するのですから、最初の一つの電荷が存在することによって、空間の性質が変化したと考えます。このように性質が変化したと考えられる空間を、一般に「場」といいます。今の場合、電気の力を考えていますから、「電場」といいます。同様に、「磁場」「万有引力場 (あるいは重力場)」といいます。

では、具体的に点電荷による電場とはどんなものでしょうか。プラスの点電荷 (電荷量 Q) が原点にある場合を考えましょう。すると、ある場所に別の点電荷 (電荷量が 1 であるような電荷:単位電荷の点電荷) を置くと、原点から遠ざかる向きに、力が作用することになります。その大きさは、原点に近い程大きく、原点から離れると小さくなります。つまり、いろいろな点に原点から遠ざかる向きのベクトルが描ける訳です。空間の中にこのようにベクトルが描ける場のことを「ベクトル場」といいます。点電荷が作る電場はベクトル場です。

それは具体的に次のように書けます。

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

この電場の各点での大きさが、原点らの距離の 2 乗に反比例することを示してみましょう。

5.4 電位

さて、上に示した電場 $\vec{E}$ は、次の関数 ϕ を用いて表すことができることがわかります。

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{E} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial x}$ という記号は、仮りに y,z については定数だと考えて x についてだけ微分する、という意味です。偏微分といいます。では、ϕ を x で偏微分を行ってみましょう。練習も兼ねて丁寧に書いてみます。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

ここで、定数倍の微分は、微分したものの定数倍であることを使いました。次に、$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ として、これを使います。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\end{aligned}$$

r^{-1} を r で微分すると、$-r^{-2}$ となりますから、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

となります。次に、$R=x^2+y^2+z^2$ とおくと、$r=R^{1/2}$ ですから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2}\frac{1}{2}R^{-1/2}\frac{\partial R}{\partial x} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2}\frac{1}{2}R^{-1/2}2x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^2 R^{1/2}} \\
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}
\end{aligned}
$$

となり、一致しました。

このようにして定義された ϕ は**電位** と呼ばれています。単位は [V](ボルト) です。ここに表れた電位 ϕ も、また、場の量です。しかし、ベクトル場ではありません。値 (スカラー) の場です。このような場をスカラー場といいます。

磁力について、同様のものを考えることができ、それを**磁位**といいます。また、万有引力についても同様ものを考えることができます。万有位、とでも言いたいところですが、通常は、**重力ポテンシャル**などと呼んでいます。

5.5 位置エネルギーと運動エネルギー

このように定義された電位にはどのような意味があるでしょうか。具体的な計算は後回しにして、結論からお話すると、次のような性質があります。

ここで、電位場の中のある一つの荷電粒子を考えます。電場以外からの力が作用していないとします。すると、次のような性質があります。

- ある場所 A から別の場所 B へ荷電粒子が移動したときに、速度 (の 2 乗) の変化量は、A の電位と B の電位の差で決まってしまう。

あるいは同じことですが、より正確に書くと次のようになります。

- (電位) × (粒子の電荷) + $\frac{1}{2}$ × (粒子の質量) × (粒子の速度)^2 は、時間が経過して、粒子が移動しても変化しない。

運動方程式を立てて運動を調べることはできます。しかし、一つ一つの問題に対していちいち運動方程式から考えていたのでは大変です。もしも、運動方程式から考えなくても、運動の様子をある程度想像できると便利です。ここで書いた性質は、時間的に変化しない量に着目した性質です。このように時間が経過しても変化しない量を「**運動の積分**」といいます。

運動の積分が沢山あれば、それだけ運動の様子がわかることになりますが、あいにくそれほど沢山ある訳ではありません。

ここに現れた

$$(電位) \times (粒子の電荷) + \frac{1}{2} \times (粒子の質量) \times (粒子の速度)^2$$

という量は粒子の**力学的エネルギー**といいます。力学的エネルギーのうち、(電位) × (粒子の電荷) は、時間に関係なく、どの場所に粒子があるかで決まる (場所の関数である) エネルギーなので**位置エネルギー**といいます。一方、$\frac{1}{2}$ × (粒子の質量) × (粒子の速度)^2 の方は、粒子の運動の速さに関係しているので**運動エネルギー** といいます。

ここまでに書いたことから、色々なことがわかります。例えば、地球表面を飛び立ち、すぐに燃料切れになったロケットを考えましょう。運動方程式を考えて、時々刻々のロケットの運動を考えれば、ロケットが再び地球に落下するのか、それとも十分に遠くまで (無限の彼方へ) 飛んでいけるのか、決めることができるはずです。

重力と万有引力
この二つの言葉の関係は微妙です。地球科学の場合には、「万有引力」に地球の自転による遠心力を加えたものを「重力」ということが多いです。一方、理論物理の場合には、遠心力を入れることはせず、ニュートンの力学の範囲では「万有引力」といい、アインシュタインによる相対性論の範囲のものを「重力」という習慣があるようです。これは困ったことです。このような背景があるために、「重力波」という言葉が指し示すものは、地球科学の場合と理論物理の場合で異なります。
言葉の定義をきちんとしなければいけない学問としては、やや情けない話です。でも仕方がないので、学生のみなさんは気を付けてください。

5.6　等速円運動の再考

ここで等速円運動について思い出しましょう。質量 m の粒子が半径 r で角速度 ω の等速円運動を行っている場合、加速度は中心向きに $mr\omega^2$ でした。等速円運動している時にも運動方程式が成り立っているはずですから、運動方程式に当てはめてみましょう。例えば、中心に向かう力が万有引力であるとすると、次のようになります。

$$\begin{aligned} F_{\text{中心向き}} &= m \times (\text{中心向き加速度}) \\ G\frac{Mm}{r^2} &= m \times r\omega^2 \end{aligned}$$

この式を簡単にすると、次のようになります。

$$GM = r^3\omega^2$$

この式はどんな意味があるでしょうか例えば、太陽の周りを回る惑星を考えてみましょう。上の式で、G は万有引力定数であり、また、M は太陽の質量です。

ですから、太陽の周りを回る惑星についてはどれも共通です。すると、太陽系をめぐる惑星について、

$$(\text{半径})^3 \times (\text{角速度})^2 \text{ が一定}$$

あるいは、角速度が 2π/周期 であることを考えると、

$$(\text{半径})^3 \div (\text{周期})^2 \ \text{ が 一定}$$
あるいは、
$$(\text{半径})^3 \text{ と } (\text{周期})^2 \text{ が比例}$$

となります。

ニュートン以前の時代、ガリレオとほぼ同時代、ケプラーは惑星の観測結果から太陽からの距離と周期との関係に気づきました。そこで、この法則をケプラーの (第三) 法則といいます。

惑星	(長) 半径 [天文単位]	周期 [年]	$(\text{半径})^3 \div (\text{周期})^2$
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1	1	1
火星	1.5237	1.88089	0.9999
木星	5.2026	11.8622	1.0008
土星	9.5549	29.4578	1.0052
天王星	19.2184	84.0223	1.00545
海王星	30.1104	164.774	1.00548

※ 外側の惑星ほど値が 1 よりも微妙に大きいのはなぜだろうか。
この例に見られるように、物理法則が純粋に成り立つような例は少なく、
何らかの影響によって多少のゆらぎがあることが多いです。

原子核の周りにある電子についても同様の運動が考えられます。日本人の長岡半太郎やイギリスで活躍したラザフォードは、原子の構造は、原子核と、原子核の周囲を回る電子で構成されると考えました。しかし、現在ではこの考え方は否定されています。実際にどのようになっているかは、量子力学の誕生後にわかってきました。

5.7　静電気と電流

さて、これまでは電荷の組織だった運動についてはあまり考えず、電荷の間に作用する力やエネルギーを考えてきました。ここで、身近な例の電位について見てみましょう。冬にセーターを脱ぐとき、静電気でセーターが洋服に吸いつきま

す。このような場合の静電気による電位は数千から数万 V といわれています。家庭用の電気は、日本では 100V (あるいは 200V) です。ですから、静電気の方が、桁違いに電位差が大きい電気です。

しかし、考えてみてください。例えば100V で電熱器を使って体や部屋を暖めることができます。ところが、セーターを脱いだり着たりして部屋が暖まったり体が暖まるとは思えません。それでは、家庭用の電気と静電気とはどこが異なるのでしょうか。

もちろん答えは電荷量です。電位のところでも触れましたが、電荷量と電位の積がエネルギーの量を決定します。日常体験する静電気は、電荷が移動しにくい物に生じます。従って、大量の電荷が流れることはありません。電圧は高くても少量の電荷だけが流れるので、それほどのエネルギーは発生しません。

一方、継続的にエネルギーを発生させるには、電荷が流れやすい物体を使い、継続的に電圧をかけることで実現します。継続的な電荷の流れを**電流**といいます。電流は、1 秒間に流れる電荷の量なので、[C/s] という単位を用います。これは、[A](アンペア) と同じです。

5.8 直流回路

電流が流れやすい物を使って継続的に電流を流す場合、二通りの流し方があります。電位の高いところと低いところが時間的に変化しない直流回路と、それが時間的に交替する交流回路です。電気回路の中の電荷の動きは見ることができません。そこで、なかなかイメージしにくいものです。その点をあらかじめ心得た上で以下の話を理解するようにしてみてください。

直流回路の代表例は次のようなものです。

このような回路は小学校から慣れ親しんでいると思います。電池は、電荷を流しながら電位を上昇させる装置です。抵抗は、名前の通り、電荷を流れにくくするものです。そのほかの線で表された部分は、抵抗が小さく、電気を良く流す物質 (**導体**) です。このような導体は事実上抵抗ゼロとして扱うことが多いです。

さて、このような回路について、これまでの学習を踏まえて考えてみましょう。

導体

まず、導体です。導体は多くの場合、金属が使われます。金属には自由電子と呼ばれる電子があります。この自由電子は、特定の金属原子に捕われることがありません。いわば、金属中の全ての原子で共有している電子と言って良いでしょう。電子の電荷は負 (マイナス) ですから、自由電子を除いた金属原子は、正 (プラス) の電荷を帯びています。このような電子が取り除かれた原子を陽イオンと呼びます。

余談ですが、原子に余分に電子がついている場合もあります。これもイオンと呼びますが、全体が負に帯電しているので、陰イオンと呼びます。

さて、自由電子があるために、抵抗がない導体内には電位差がありません。もしも電位の高いところと低いところがあったとしたら、電位差を打ち消すまで電子が移動するでしょう。これの考え方はいろいろな場面で重要になります。

電池

電池は電子のポンプのような働きをします。電池のマイナス極 (陰極) 側では電子を押し出し、電池のプラス極 (陽極) では、電子を吸い込もうとします。

このときの、電子を押し出したり吸い込んだりする能力が電位差 (これを**電圧**といいます) に当たります。

静電気との決定的な違いは、継続して電子を供給できるところです。電池ができて初めてわかった電気の性質が沢山あります。実際、ボルタが実用的な電池 1799 年にを作ってからおよそ 30 年間の間に、多くの電気 (電流) についての法則が得られています。

なお、実際に移動するのは電子なのですが、電子が発見されるより前に電流が定義されたこともあり、電荷の流れである電流は、仮想的なプラスの電荷の流れと決められています。電子の流れる向きとは逆になります。

抵抗

導線の中を電圧によって動く電子を想像してみてください。特に流れを邪魔する物がなかったら、電子は落下する石のように、どんどん加速しながら流れるでしょう。逆にそうならないならば、電子の流れを妨げるような何かがあるのだと考えられます。それが抵抗です。

本来加速されてもいいようなところを、言葉を替えれば、運動エネルギーが増えてもよさそうなところを、運動エネルギーが増えないまま流れるとしたら、電子は運動エネルギーを失うことになります。

抵抗では、電子から失われたエネルギーが、熱や光のエネルギーとなります。

このような回路については、次のキルヒホッフの法則が成り立ちます。これが直流回路についてのポイントになります。

- 直流回路の各部分について、電圧 E と電流 I と抵抗の大きさ R について次のオームの法則が成り立つ。

$$E = R \times I$$

- 直流回路の各部分について、入ってくる電流の量と出ていく電流の量は同じである。

5.9 アンペールの法則

この章の冒頭で自然界の４つの力について説明しました。そこで不思議に思った人も多いと思います。というのも、電気と磁気の力を一つにまとめているからです。これまでの説明では電気と磁気は別物でした。しかし、実際には、電気と磁気には密接な関係があります。その関係の一部分について話を進めましょう。

まずは、電気による磁場の生成です。電流は電荷をもった粒子の流れです。この電流の周りには磁場が発生します。その様子は、右手 左手を使って説明するとわかりやすいです。今、電流の向き (正の電荷を持った粒子が進む向き) に親指を対応させます。次の図のように、親指を立てて、他の指で握り拳を作ると、親指以外の指の向きに磁場が発生します。

大きさを含めて書くと、次のようになります。

このように電荷が移動すると磁場が発生します。

導線を次の図のように巻いたものをコイルといいます。

コイルに電流を流すことを考えましょう。コイルのそれぞれの部分にアンペールの法則を適用すると、コイルの周辺では次の図のような磁場ができます。

5.10 ローレンツ力

次に、正の電荷を持った粒子が磁場の中を進む場合を考えましょう。すると、この粒子には、すこし想像しづらい力が作用します。これを説明するために、左手を用意し、次のように３本の指を伸ばして下さい。すると、粒子の進行方向を中指、磁場の向きを人差指に対応させると、親指の方に力が作用します。このような力をローレンツ力といいます。磁場に対して垂直な方向に力が作用するのは、とても特徴的です。

大きさも含めて書くと、次のようになります。

5.11 電流の受ける力

ローレンツ力は一つの荷電粒子に対する力でした。しかし、電流が導線の中を次々に移動する荷電粒子であることを考えると、電流を流した導線が力を受けるであろうこと、そして、力の向きや大きさは容易にわかります。

ここで、電流に作用する力が単位長さ当たりになっていることに気を付けてください。

このような力が作用することと、電流の周りの磁場のでき方を考えると、並行して導線が通っているときに、導線間に作用する力がどんなものかを考えること

ができます。

余談になりますが、雷が落ちて、木が割れる現象について、聞いた話を書いてみます。

5.12 電磁誘導

今度は、静止している磁石に対して、次の図のように導線を動かすことを考えましょう。導線の中の電荷 (具体的には電子) は、導線と共に運動しているので、この電子に対してローレンツ力が作用します。すると電子は移動しようとします。電子が流れようとするということは、今考えている導線の部分に電位差が生じていることを意味します。このように、導線と磁石の相対的な運動によって電圧が生じることを電磁誘導といいます。

5.13 磁場の単位

磁場の強さを表す場合、「磁場の強さ」と呼ばれるものと、「磁束密度」と呼ばれるものの両方が良く現れます。基本的に一様な物質の中では互いに比例するので、どちらかを使えばよさそうなものです。しかし、両方現れれてくる上に、流儀によってどちらを主に使うかが分かれてきます。その上、単位を考えると更に厄介です。ここでは、単位を意識しながら、それぞれの物理量についてまとめてみましょう。

磁場のクーロンの法則

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

- 磁荷 m_1, m_2 の単位：[Wb]
- 透磁率の単位：[Wb^2/N・m^2]

磁場の強さ

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r_{12}^2}$$

- 磁場の単位：[N/Wb]

アンペールの法則

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

- 磁場の単位：[A/m] = [N/Wb]

※ 磁場に関するクーロンの法則などから次の関係も得られる。

- 磁荷の単位：[Wb] = [N・m/A] = [kg・m^2/A・s^2]
- 透磁率の単位：[Wb^2/N・m^2] = [Wb/A・m] = [kg・m / A^2・s^2]

電磁誘導の法則

$$F = qvB$$

- 磁束密度の単位：[N/A・m] = [Wb/A・m][N/Wb]

磁場と磁束密度の関係

$$B = \mu_0 H$$

6 振動と波動

世の中のいろいろなものは、意外にも波で表されます。まず、世の中の物質を構成する電子や陽子、つまり原子を構成する素粒子は、波の性質を持っていることが知られています。また、光や電波は (粒子の性質も持っていますが、) 波です。音や地震も波ですし、海のうねりや津波も波です。さらに、大気中には、ロスビー波や内部重力波などといった波があります。こうした波にはいろいろなエネルギーを運ぶ性質があり、離れた場所に影響を及ぼします。また、波の性質をうまく使うことで、見えないものが見えてくることがあります。例えば、地球の内部がどうなっているか、について、人間は地面を数 km しか掘ることに成功していません。しかし、それよりも深い場所の様子がわかるのは、波の性質をりようしているからです。そこで、波の役割を知っておくことはとても重要です。

また、波を考えるときには、あらかじめ振動について知っておく必要があります。波を観察すると、それぞれの場所では何かが振動しているだけで、その「何か」自身が伝わっている訳ではありません。例えば、地震は、地下の震源で岩盤の破壊によって始まりますが、その岩盤が地表まで飛んでくる訳ではありません。また、地震で揺れている場所の全てで岩盤が壊れているわけではありません。大地は基本的には移動せず、各地点で振動し、それが伝わってきているのです。そこで、まず、振動について詳しく見ていくことにしましょう。

6.1 単振動

次の図のような、バネについたおもりの運動を考えてみましょう。

x 軸は向かって右側を正にとり、伸び縮みが無い点を原点にとっています。バネには、近似的に**フックの法則**が成り立ちます。つまり、バネが伸び縮みすると、伸び縮みに比例した**復元力** (元に戻ろうとする力) が作用します。つまり、おもりには、原点から離れるとそのずれた量 (これを**変位**といいます) に比例して原点に向かうような力が作用します。

このおもりについての運動方程式を考えてみましょう。

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

左辺が力です。変位 x に比例する力で、x が正の時には負の向き、x が負のには正の向きに作用するように、負の符号 (負号) を使っています。k は比例定数です。右辺は質量 m と x 方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ です。

これで運動方程式が立てられました。この運動方程式を満足するような x を求めることができれば、バネにつながったおもりの運動がわかるはずです。このようなタイプの運動方程式は、とても基本的な式なので、答えを覚えておくと便利

です。具体的にいうと、x を 2 回微分すると x の定数倍 (ただしこの定数は負の数) になるような微分方程式です。このような場合には、$x = A\sin\omega t$ と置いてみて、後から ω を決定するのが定石です。

では、実際に計算して確かめてみましょう。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}A\sin\omega t &= \frac{d}{dt}\left(A\frac{d}{dt}\sin\omega t\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos\omega t\right)\\ &= A\omega\frac{d}{dt}\cos\omega t\\ &= -A\omega^2\sin\omega t\end{aligned}$$

となります。これを運動方程式に代入します。$x = A\sin\omega t$ ですから、

$$\begin{aligned}-k(A\sin\omega t) &= m(-A\omega^2\sin\omega t)\\ -k &= -m\omega^2\\ \omega &= \sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned}$$

となり、確かに矛盾はなく、正しい答えを導けたようです。最終的な答えは、次のようになります。

$$x = A\sin\sqrt{\frac{m}{k}}t$$

このような運動を単振動といいます。

単振動について、以下にまとめます。

1. 振動中心からのずれ (**変位**) に比例した復元力が作用する場合の運動である。
2. 変位の時間変化は、正弦関数 (sin) を使って、$A\sin\omega t$ というように表される。

最後に補足しておきます。一般に、未知数 (あるいは変数) が n 個あった場合に、この n 個の値を決めるためには n 本の方程式が必要になることが知られています。

それでは、このように微分が入っている運動方程式のような場合にはどうでしょうか。$f(x)$ の微分と $f(x)+C$ の微分を考えましょう。これらのグラフを考えると、縦軸方向にずらしただけですから、どちらも傾きは一致します。つまり、これらの微分は一致します。このように、微分が入ると定数分の違いについての情報が失われてしまうわけです。そこで、n 階の微分 $\frac{d^n}{dt^n}$ などが入っている場合には、一般に、n 個の定数が未知数として入ってきます。そのため、その他の条件をつけてこれらの未知数を決定する必要があります。具体的には、初期の状態を考えることで、これらの定数を決めることができます。

今回の場合には、実は、解は次のように二つの定数 A, ϕ_0 を含む形で書くのが最も正しい書き方です。もちろん、これは、元の方程式が 2 階の微分を含んでいるからです。

$$
\begin{aligned}
x &= A\sin(\omega t + \phi_0) \\
v &= \frac{dx}{dt} \\
&= A\omega\cos(\omega t + \phi_0)
\end{aligned}
$$

振動を開始させたとき $(t = 0)$ の位置と速度の情報が A, ϕ_0 を決めることになります。このような種類の知識は、考え方の道標になりますから、是非大事にしたいものです。

6.2 単振動と等速円運動

等速円運動の復習から始めます。x 軸と y 軸で作られる平面内の等速円運動を考えましょう。等速円運動の運動方程式は、動径方向 (回転の中心と物体を結ぶ直線上の方向で、中心向きを正とします。) について

$$
F = -m\omega^2 A
$$

と書けました。F は万有引力であったり、電磁気の力であったり、ローレンツ力であったりします。いずれにしても、F の値は時間変化せず、一定でした。また、いつも物体から中心に向かって作用しました。

この力 F をベクトルで書くことを考えましょう。中心から物体へ伸びるベクトルが位置ベクトルでした。一方、力は、物体から中心に向かって作用します。そこで、中心向きの力 F をベクトルで書くとすると、位置ベクトル $\vec{x}$ の定数倍で書くことができるはずです。位置ベクトル x の大きさは A です。念のため確認すると、$\vec{x} = (A\cos\omega t, A\sin\omega t)$ ですから、$\vec{x}$ の大きさは、$\sqrt{(A\cos\omega t)^2 + (A\sin\omega t)^2} = \sqrt{A^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)} = A$ となります。そこで、$\frac{1}{A}\vec{x}$ は、大きさ 1 のベクトルとなります。これを $-F$ 倍すると、ちょうど望んだ $\vec{F}$ を求めることができそうです。$\vec{F}$ を成分ごとに (F_x, F_y) とすると、

$$
\begin{aligned}
F_x &= -F\frac{x}{A} \\
F_y &= -F\frac{y}{A}
\end{aligned}
$$

となりました。

これを用いて、運動方程式を、x, y のそれぞれの成分に再び分解してみましょう。すると、次のようになります。

$$
-F\frac{x}{A} = m\frac{d^2x}{dt^2}
$$

$$-F\frac{y}{A} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

これを良く見ると、等速円運動の x 成分と y 成分は、それぞれ単振動の運動方程式と全く同じであることがわかります。

6.3　単振り子

例えば、次のような**単振り子**を考えましょう。糸は重さが無くて伸び縮みもしないとします。このような糸につり下げられたおもりは、単振り子と呼ばれています。単振り子に作用する力を考えると、重力と、おもりに接している糸とおもりの間に働く力 (これを**張力**といいます) だけです。この二つの合力によっておもりは運動します。

このおもりの運動を考えるために、運動方程式を立ててみましょう。原点をおもりの最下点にとり、また、振り子の運動を 2 次元平面内であるとします。すると、

$$-T\frac{x}{\ell} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$T\frac{\ell - y}{\ell} - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

となります。ここで、図中の角度 θ に対して、$\sin\theta = \frac{x}{\ell}, \cos\theta = \frac{\ell - y}{\ell}$ であることを利用しています。この関係は図で確認しておきましょう。ここで T について考えてみましょう。T は外部から与える力では無く、必要に応じて糸が伸び縮みしないように自動的に決まる力です。したがって、現時点では、その大きさはわかりません。ただ、糸の張っている方向に作用していることだけはわかるだけです。そこで、この T については、十分に注意する必要があります。

簡単のために、θ が十分に小さい場合を考えます。すると、おもりの運動はほとんど x 軸上だけになります。そのため、y 方向の運動は無視でき、y 方向の加速度がゼロであると仮定してもよさそうです[13]。

すると、y 方向の運動方程式に $y = 0$ を代入すると次のようになります。

$$T - mg = 0$$

そこで、再び、x 方向の運動方程式をもう一度見てみましょう。$T = mg$ を代入すると、次のようになります。

$$-\frac{g}{\ell}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

[13]実際には、ここの議論は省略しすぎています。より正確な議論については、「力学」で学ぶ機会があるといいと思います。

この方程式については、既に解けるようになっています。

$$x = A\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$$

この解から得られる結論の一つは、近似の成り立つ範囲では、振れ幅によらない、ということです。これを振り子の等時性といいます。ガリレオ・ガリレイは、教会の天井から下げられた燭台が揺れるのみて、振り子の等時性に気づき、自分の脈拍でそれを測った、という話が残っています。

最後にもう一度、単振動と等速円運動の関係についてコメントしておきましょう。x 方向の単振動と y 方向の単振動とを重ね合わせると等速円運動も作ることができますし、その他にもいくつかのおもしろい運動を作ることができます。

6.4 波動

波について、スプリングを用いて、その振動の様子を調べてみましょう。まず、波には縦波と横波があります。この違いは、時々誤解を招くことがあるので良く理解するようにしてください。

縦波

波の進む向きと振動の向きが平行な波
例: 音波, 地震の P 波 (これも実は音波)

横波

波の進む向きと振動の向きが直行している波
例: 光、地震の S 波

まず、スプリングの各点はずっと移動していくわけではなく、各点各点がそれぞれ振動していることに気をつけましょう。そして、それぞれの点がどの向きに振動しているか、それに注目してみましょう。

次に、各点での振動について、式に書いてみましょう。すると、次のように書けます。

$$z = A\sin(\omega t + P(x))$$

波の場合、ある時刻の変位は場所によって異なります。そこで、$\phi(x)$ という項を置いています。

今度は、ある時刻 (つまり、ある瞬間) の波の様子を見てみましょう。すると、こうなっているはずです。

$$z = A\sin(kx + Q(t))$$

7　物理学に出てくる数学

7.1　ギリシア文字

α	A	A	アルファ
β	B	B	ベータ
γ	Γ	$\mathit{\Gamma}$	ガンマ
δ	Δ	$\mathit{\Delta}$	デルタ
$\epsilon(\varepsilon)$	E	E	イプシロン
ζ	Z	Z	ゼータ
η	H	H	イータ
$\theta(\vartheta)$	θ	$\mathit{\Theta}$	シータ
ι	I	I	イオタ
κ	K	K	カッパ
λ	Λ	$\mathit{\Lambda}$	ラムダ
μ	M	M	ミュー
ν	N	N	ニュー
ξ	Ξ	$\mathit{\Xi}$	グザイ
o	O	O	オミクロン
$\pi(\varpi)$	Π	$\mathit{\Pi}$	パイ
$\rho(\varrho)$	P	P	ロー
$\sigma(\varsigma)$	Σ	$\mathit{\Sigma}$	シグマ
τ	T	T	タウ
υ	Υ	$\mathit{\Upsilon}$	ウプシロン
$\phi(\varphi)$	Φ	$\mathit{\Phi}$	ファイ
χ	X	X	カイ
ψ	Ψ	$\mathit{\Psi}$	プサイ
ω	Ω	$\mathit{\Omega}$	オメガ

7.2　ベクトル

ベクトルとは

向きと大きさを持ったものを**ベクトル**といいます。図としては矢印で表すことが多いです。矢印の根元を**始点**といい、矢印の先端を**終点**といいます。

ベクトルの成分表示

ベクトルを矢印で書いただけでは、大きさについての数量的な議論 (**定量的**な議論) ができません。そこで、ベクトルを数値で表すことを考えます。

通常は、3 次元の普通良く用いる座標系 (直交直線座標系, デカルト座標系)

を用います。そこで、ベクトルの成分は図に示したような3つの数値を書き並べて表します。

7.3 指数法則

指数とは

10^2 のように、ある数字の右肩上に数字を書くことがあります。このような右肩上に書く数字のことを指数といいます。この場合は、10 を 2 回続けて掛け合わせることを意味します。このような考え方から、指数は整数だけのようにも思われますが、次のような指数法則から分数や少数についても定義することができます。

1. $A^pA^q = A^{p+q}$
2. $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$
3. $A^0 = 1$
4. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$
5. $(AB)^p = A^pB^p$
6. $(A^p)^q = A^{pq}$
7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}, \cdots$

7.4 三角関数

関数

ある値 x を決めるとそれに応じた値 y が決まるとき、y は x の関数といいます。

三角関数

次の図のように、角度 θ に対して $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を決めます。これらは直角三角形の辺の長さやそれらの比を表しています。これらは角度 θ の関数なので、三角関数といいます。

弧度法

角度を表すときには、弧度法を用いることが多いです。半径1の円 (単位円) に弧が一致する扇形を描いた時、弧の長さを角度とするものです。90 °は $\pi/2$, 180 °は π, 360 °は、2π になります。

その他の三角関数

三角関数は 6 種類あり、それらは相互に次の図で表される関係にあります。

この図は、三角関数の次のような性質を表しています。

1. 左側の関数名に “co” をつけるたものが右側の関数名になる。
2. ある三角関数は、その両隣の積で表される。
3. 1 を挟んで両側の三角関数は互いに逆数の関係にある。
4. 下向きの三角形については、三平方の定理に対応する関係式がある。
   (a) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   (b) $\tan^2\theta + 1^2 = \sec^2\theta$
   (c) $1^2 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

加法定理

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

この公式は、複素数についてのガウスの式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$(i は虚数単位 $i^2 = -1$) さえ覚えておけば、指数法則を適用することで導くことができます。

$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}} + i\ \underline{\sin(\alpha+\beta)} \\
e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}} + i\left(\underline{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}\right)
\end{aligned}$$

7.5 微分

微分とは

関数 $f(x)$ のグラフを、横軸に x、縦軸に $f(x)$ をとって描く。このとき各 x に対応して傾きが定まる。つまり、x の関数として $f(x)$ の傾きが定まる。これを「$f(x)$ の x についての微分」といいます。

なお、傾きとは、x の値が Δx だけ増えたときに、$f(x)$ が Δf だけ増えたとすると、$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ のことです。Δx が大きいと、Δf も大きいと予想されます。Δx が小さいと、Δf も小さいと予想されます。ところが、その比 ($\Delta f/\Delta x$, 傾き) はそれほど変わらないだろうし、Δx を小さくすると一定の値に近付くと予想されます。そうして一定の値になったもの微分です。

代表的な関数の微分

$$\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1} \\
\frac{d\sin x}{dx} &= \cos x \\
\frac{de^x}{dx} &= e^x
\end{aligned}$$

微分の公式

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(af(x)\right) &= a\frac{df(x)}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) &= \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx} \\
\frac{d}{dx}\left(f(x)\times g(x)\right) &= \frac{df(x)}{dx}\times g(x)+f(x)\times\frac{dg(x)}{dx} \\
\frac{df(g(x))}{dx} &= \frac{df(g)}{dg}\times\frac{dg(x)}{dx}
\end{aligned}$$

※ a は定数とします。

7.5.1 2次関数の微分

このように説明されれても、具体的なイメージは湧きにくいと思います。そこで、具体例を挙げてみましょう。一般に t^n などで表すことができる関数を**代数関数**といいます。代数関数の中で、親しみがあると思われる **2 次関数**について考えてみましょう。つまり、次のような関数です。

$$\begin{aligned}
x &= f(t) \\
&= at^2
\end{aligned}$$

ここで a は定数であるとします。

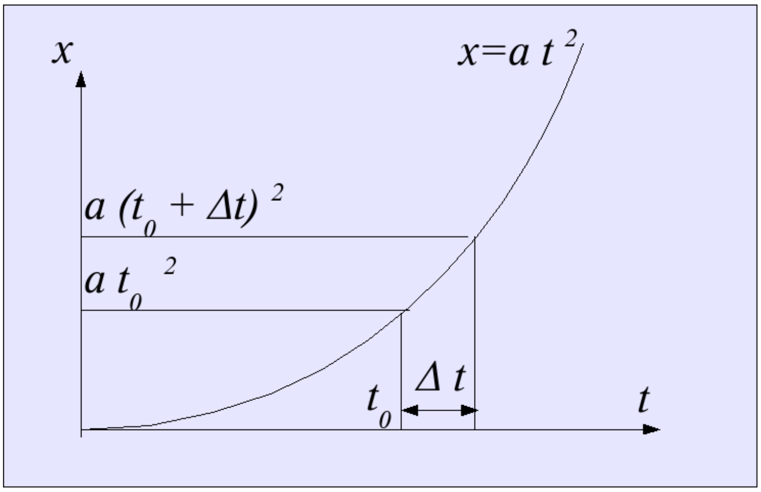


図 18: 二次関数の微分

微分するということは、t を与えたときに、その $(t, f(t))$ での傾きを t の関数として求めることです。そこで、$t = t_o$ とおいて、この周辺で考えます。点 A を (t_o, at_o^2) とします。点 B は、点 A から少しだけずれた点を考えますから、$t = t_o + \Delta t$ とします。Δt と書いたものは、二つの文字変数ではなく、ひとかたまりですので注意してください。小さな変化量を表すときにこのような書き方をよくします[14]。すると B 点の縦軸 (x) の値は、$a(t_o + \Delta t)^2$ です。AB を結ぶ直線の傾きを考えましょう。点 A と 点 B で考えると、横軸に沿って値は Δt だけずれています。縦軸に沿っては、$a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2$ だけずれています。そこで、次の値が傾きになります。

$$\frac{a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2}{\Delta t}$$

なんだか全然簡単ではありませんね。更に、点 B を点 A に近づける、つまり、Δt をゼロに近づけるなんて、とても難しそうです。しかし、あきらめないで、これを変形してみましょう。まず、2 乗している部分を展開してみます。

$$\begin{aligned}\frac{a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2}{\Delta t} &= \frac{a(t_o^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - at_o^2}{\Delta t} \\ &= \frac{at_o^2 + 2at_0\Delta t + a\Delta t^2 - at_o^2}{\Delta t} \\ &= \frac{2at_0\Delta t + a\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= 2at_0 + a\Delta t\end{aligned}$$

[14] Δ は デルタ と読みます。“t の値の違い” を表すとき、“difference” の “d” に対応するギリシア文字の Δ を使うことがよくあります。

最後のところでは、Δt で約分しています。次に、Δt をゼロに近付けてみましょう。分子と分母に Δt が入っている場合には、Δt をゼロに近づけるのは難しそうでした。しかし、$2at_0 + a\Delta t$ について Δt をゼロに近づけた時の値を考えるのは簡単です。Δt にゼロを代入すればいいのです。したがって、答えは $2at_o$ です。

ゼロに近づけることを表す場合には、$\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ という記号を用いることが多いです。そこでこれまでの結果をまとめると、次のようになります。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \{2at_0 + a\Delta t\} \\ &= 2at_o\end{aligned}$$

t_o はどんな値でも構いませんから、これを改めて t と書きます。すると、元の関数 $x = f(t)$, $f(t) = at^2$ を微分して t の関数として微分係数が $2at$ が求まったことになります。

7.5.2 微分表記

このように微分を行うことができました。微分については、次のような表記が一般的です。まず、関数 $f(t)$ に対して、それを微分したものを $f'(t)$ と書くことがあります。

$$\begin{aligned}f(t) &= at^2 \\ f'(t) &= 2at\end{aligned}$$

次に、$x = at^2$ とした場合には、

$$\begin{aligned}x &= at^2 \\ \frac{dx}{dt} &= 2at\end{aligned}$$

とします。微分を表す記号の d は、Δ と同様に小さな違いを表すために付けられています。dx は x の小さな違い (縦軸方向のずれ)、dt は t の小さな違い (横軸方向のずれ)、$\frac{dx}{dt}$ は、それらの比で、傾きを表している訳です。x を $f(t)$ に置き換えて、次のように表すこともあります。

$$\begin{aligned}f(t) &= at^2 \\ \frac{df(t)}{dt} &= 2at\end{aligned}$$

さらに、分子側の表記 $(f(t))$ が長い場合には、次のように書くこともあります。

$$\frac{d}{dt}f(t) = 2at$$

7.5.3　基本的な関数の微分

1. 代数関数

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$$

これを証明してみましょう。Δt が沢山現れるので、以下では h で置き換えます。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^n - t^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(t^n + nht^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2t^{n-2}\cdots) - t^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{nht^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2t^{n-2}\cdots}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ht^{n-2}\cdots\right\} \\ &= nt^{n-1}\end{aligned}$$

例として、1 次関数と 2 次関数について見てみましょう。

- 1 次関数

$$\begin{aligned}f(t) &= at \\ f'(t) &= a\end{aligned}$$

※ $y = ax + b$ という 1 次関数を学校で勉強したかもしれません。a は「傾き」と言っていませんでしたか？

- 2 次関数

$$\begin{aligned}f(t) &= at^2 \\ f'(t) &= 2at\end{aligned}$$

※ これについては既に詳しくやりました。

2. 三角関数

$$\frac{d\sin t}{dt} = \cos t$$

これを加法定理を使って計算してみます。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h) - \sin t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sin t\cos h + \cos t\sin h) - \sin t}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin t\cos h-\sin t+\cos t\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\sin t\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos t\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin t\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos t\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}
$$

それぞれの極限 $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ を求めることは数学の教科書を読んでみてください。ただ、グラフを描けばすぐにわかるように、 $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$ は原点付近での 余弦関数 $\cos t$ の傾きであり、これはゼロです。また、$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h}$ で、正弦関数の原点付近での傾きがこれにあたります。これは 1 になります。

そこで結局 $\frac{d\sin t}{dt} = \cos t$ となります。

3. 指数関数

$f(t) = a^t$ と書けるような関数を t の**指数関数** といいます。このグラフを描いてみると、t が小さいほど傾きが小さいことが予想されます。また、t が大きいほど傾きが大きいことが予想されます。つまり、指数関数の微分は指数関数と似た形になることが予想されます。実際、指数関数の微分は指数関数になります。

今度は、a の値によってどのように変化するか考えてみましょう。a の値が大きいと $f(t)$ の値も傾きも大きくなります。逆に a の値が小さいと $f(t)$ の値も傾きも小さくなります。そこで、ちょうどいい値の場合に $f(t)$ を微分すると $f(t)$ と全く同じものが得られるようになります。つまり、$f'(t) = f(t)$ となるものが得られます。その時の a の値は、**自然対数の底**と呼ばれ e で表します。$e = 2.71828182846\cdots$ です。

このような経緯から、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^t\\
f'(t) &= e^t
\end{aligned}
$$

7.5.4 微分と近似

微分の定義がわかると、微分を使った便利な式が得られます。まず、微分の定義から出発します。

$$
f'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}
$$

等号は Δt がゼロに近付いた場合だけ成り立ちます。しかし、Δt がある程度小さければ、近似的に成り立つと考えてもいいでしょう。二点 A B を結ぶ直線が接線

と近いことに対応しています。そこで、次のような近似的な関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned} f'(t) &\simeq \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \\ f'(t)\Delta t &\simeq f(t+\Delta t)-f(t) \\ f(t)+f'(t)\Delta t &\simeq f(t+\Delta t) \end{aligned}$$

$f(t)$, $f'(t)$ がわかれば、t が少し (Δt) だけ変化したときの関数の値 $(f(t+\Delta t))$ を近似的に表すことができる訳です。

7.5.5 微分の計算規則

微分の計算には次のような規則があります。

1. 定数倍

$$\frac{d}{dt}(af(t)) = a\frac{df(t)}{dt}$$

微分の定義を用いて考えると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{af(t_0+\Delta t)-af(t_o)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} a\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t} \\ &= a\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t} \end{aligned}$$

ゴムのように伸び縮みする素材にグラフを描いたことを想像してみましょう。縦軸方向に伸び縮みさせると、それに応じて傾きも大きくなったり小さくなったりします。縦方向に 2 倍にすれば、縦軸方向のずれは全て 2 倍になるので、傾きも 2 倍になります。

2. 足し算

$$\frac{d}{dt}(f(t)+g(t)) = \frac{df(t)}{dt}+\frac{dg(t)}{dt}$$

微分の定義を用いて考えると、次のようになります。

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)+g(t_0+\Delta t))-(f(t_o)+g(t_o))}{\Delta t} \\ = & \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)-f(t_o))+(g(t_0+\Delta t)-g(t_o))}{\Delta t} \\ = & \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_o)}{\Delta t} \end{aligned}$$

縦軸方向のずれが二つの部分にわかれている場合には、それぞれのずれを足し合わせれば、全体のずれになることは当り前です。

3. かけ算

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\times g(t)\right) = \frac{df(t)}{dt}\times g(t) + f(t)\times\frac{dg(t)}{dt}$$

これも微分の定義に立ち返って考えてみましょう。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)\times g(t_0+\Delta t)) - (f(t_o)\times g(t_o))}{\Delta t}$$

ここで、$f(t_0+\Delta t)$ が近似的に $f(t_0)+f'(t_o)\Delta t$ と表されることを思い出すと、次のようなものの極限を考えればよさそうです。

$$\begin{aligned}
& \frac{((f(t_0)+f'(t_o)\Delta t)\times(g(t_0)+g'(t_o)\Delta t)) - (f(t_o)\times g(t_o))}{\Delta t} \\
= & \frac{f(t_0)g(t_0)+f(t_o)g'(t_o)\Delta t+f'(t_o)g(t_o)\Delta t+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t^2-f(t_o)g(t_o)}{\Delta t} \\
= & \frac{f(t_o)g'(t_o)\Delta t+f'(t_o)g(t_o)\Delta t+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t^2}{\Delta t} \\
= & f(t_o)g'(t_o)+f'(t_o)g(t_o)+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t
\end{aligned}$$

これは、$f(t_o)g'(t_o)+f'(t_o)g(t_o)$ に近づきます。

4. 合成関数の微分

$$\frac{df(g(t))}{dt} = \frac{df(g)}{dg}\times\frac{dg(t)}{dt}$$

f が g の関数で、その微分 $\frac{df(g)}{dg}$ を求めることができたとします。それは、g が Δg だけ変化した時に、f が変化する量 Δf を割合の形で表しています。例えば、$\frac{df(g)}{dg}$ が 2 ならば、$\Delta f\simeq 2\Delta g$ です。

g が t の関数で、その微分 $\frac{dg(t)}{dt}$ を求めることができたとします。これについても同様で、例えば、$\frac{dg(t)}{dt}$ が 3 だとしましょう。すると、$\Delta g\simeq 3\Delta t$ です。

この二つを組み合わせると、次のようになります。

$$\begin{aligned}
\Delta f &\simeq 2\Delta g \\
&\simeq 2(3\Delta t) \\
&\simeq 6\Delta t
\end{aligned}$$

これと同じような計算をすることで、一般に、$\Delta f\simeq\frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}\Delta t$ となることがわかります。

このような計算の規則を用いると、微分できるものが格段に増えます[15]。

[15]残りの微分の規則は逆関数の微分に関するものですが、これは改めて別のところで学習することでしょう

7.5.6　微分の計算の練習

ここまでに書いたことが、微分についての基本的な知識です。しかし、実際に使いこなすまでには、やはり、ある程度の練習が必要です。

- 例 1

  特に合成関数の微分の練習は慣れないと難しいです。例えば、$\cos t$ の微分について考えましょう。$\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ を使って考えます。$f(g) = \sin g$, $g(t) = t + \frac{\pi}{2}$ と対応させることができます。そこで、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\cos t &= \frac{d}{dt}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{d}{dt} f(g(t)) \\
&= \left(\frac{df}{dg}\right)\left(\frac{dg}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{d}{dg}\sin g\right)\left(\frac{d}{dt}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= (\cos g)\,(1) \\
&= \cos g \\
&= \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin t
\end{aligned}
$$

- 例 2

  $\frac{1}{\sin t}$ を t について微分してみましょう。この微分を考えるには、$f(g) = \frac{1}{g} = g^{-1}$, $g(t) = \sin t$ として考える必要があります。すると、次のようになります。対応関係を考えるのが難しいかもしれません。しかし、逆に対応関係さえわかってしまえば理解できると思います。じっくり時間をかけて対応を考えてみてください。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{\sin t} &= \frac{d}{dt} f(g(t)) \\
&= \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dt} \\
&= \left(\frac{d}{dg} g^{-1}\right)\left(\frac{d}{dt}\sin t\right) \\
&= \left((-1)g^{-2}\right)(\cos t) \\
&= -\frac{1}{\sin^2 t} \times \cos t
\end{aligned}
$$

- 例 3

  合成関数の微分を用いると、次のような、覚えなくてもいいけれども覚えておくと大変便利な公式が得られます。自分で導いてみましょう。

  - $\frac{d}{dt}f(at+b) = -af'(at+b)$
  - $\frac{d}{dt}\frac{1}{f(t)} = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}$
  - $\frac{d}{dt}\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{g'(t)f(t)-f'(t)g(t)}{f^2(t)}$

以上が微分に関する基礎的な知識です。これらを使って、与えられた関数のグラフの傾きを計算することができるようになりました。以下では、こうした微分を少しずつ使いながら理解を深めていきましょう。

8　もっと学ぶために