物理学概論 講義ノート

桜美林大学 森 厚

平成 21 年 4 月 10 日

目 次

1 はじめに

1.1 桜美林大学の物理学概論

このノートは、桜美林大学の講義である「物理学概論」のために書かれたものです。

桜美林大学の「物理学概論」は、おそらく他学の「物理学概論」とは異なる性質をもっていると考えられます。

理科系の分野を他の大学で学ぶ場合を考えましょう。他学では、既に高校の段階である程度理系の科目に慣れ親しんでいることを前提としていることでしょう。また、受験科目にも理科や数学の科目が並んでいることでしょう。そして、多くの理科系の大学生向けの教科書は多かれ少なかれ、高校で学習する内容を前提にして書かれています。もちろん、文科系向けの物理学の教科書もあります。その場合、高校での履修を前提としていません。しかし、それは、理学を本格的に学習しようとする人向けのものではなく、教養としての物理学に過ぎません。

桜美林大学の場合、新設されたリベラルアーツ学群の理念に則って、新たに物理学概論を準備する必要がありました。リベラルアーツ学群では、まずは 1,2 年生の時にしっかりと教養を高めることが求められます。そして、その後に、大学で専攻する分野を選択してもらいたいと考えています。それは、人文科学系・社会学系などの専門分野だけではなく、数学や理科系の学問分野も含んでいます。そこで、高校で理系科目を十分に学習してこなかった学生も、本格的な理科系の学問を勉強できるための体制を整える必要がありました。

また、実際に開講してからわかったこともあります。それは、本当は理科系の科目に興味を持ちながら、実際には高校の進路指導や、友人関係などのために、文科系クラスに入っていた学生が意外にも多く存在していることです。そうした学生のために、高校で文科系クラスに所属していたとしても、理学を学習するための前段階の科目を整える必要があった訳です。

そこで、桜美林大学では、高校で学ばなかった学生を前提に、本格的に理系科目を学ぶ前段階の科目を設けています。物理学概論は、その一つで、物理学の諸々の科目や、地震学・気象学・天文学を学習すための前段階の科目として位置づけられています。

ただし、その内容は、高校の物理と全く同様ではありません。高校の理科は、大学に進学しない生徒、大学でも文系に進学する生徒を考慮しています。また、履修時期が前後する可能性のある数学 II, 数学 III などの内容を使わないように工夫しています。ところが、数学の一部は物理学と同時に学ぶととても効率的です。それは、物理学によって数学が発達した部分があるからです。そこで、この講義でも数学の内容を積極的に取り込んでいます。語学を学ぶ場合も一つの語学だけを学ぶより、複数の言語を同時に学んだ方が効率的だと言われています。数学と物理は、互いに重複する部分もあるので、両方同時に学ぶことはとても効率がいいのです。

この他の役割もあります。例えば、桜美林大学の物理学概論は、情報学や哲学の卒業単位 (メジャーやマイナー) にも認定される科目となっています。物理学の考え方を学ぶことが、物理学以外の分野でも役立つと考えられているからです。更に、物理学概論は、中学校や高校の理科の教員免許を取得するためにも必要な科目となっています。

このような位置づけにある桜美林大学の物理学概論は、やはり、やや特異な性質を持っていると思います。そこで、これまでとは違った新しいテキストを作る必要を感じた訳です。

この講義の目標は、次の 3 つです。

1. 物理学の言葉に親しむこと

   物理学を学ぶためには、やはりある程度の知識は必要です。そこで、物理学で良く用いられる言葉 (単語や法則も含みます) に慣れ親しむことが必要です。

2. 物理学的な考え方を身につけること

   しかし、覚えることが物理学を学ぶ上で大切なのではありません。もっとも重要なのは、物理学的な考え方を身につけることです。

   ちなみに、残念ながら、高校で学ぶ物理学は「暗記科目」と捉えられているようです。物理学は難しいと敬遠されるために、例えば大学入試センター試験の物理の問題はどんどん易しくなっているように見えます。問題が易しくなると、安易な公式の適用を求める問題が多くなり、その結果、問題のパターンを暗記していれば得点できるようになっているのではないでしょうか。そうだとすると、暗記科目の物理学はますます魅力がないために、ますます敬遠されることになっているのではないでしょうか。これでは悪循環です。

   考えることは面白いことだと私は思います。そして、おそらく、人間が人間らしい活動を行うためには考えることが必要です。様々な対象を色々な側面から考えて、自分なりの発見ができるような能力を、是非、身につけたいものです。

3. 物理学に対するアレルギーをなくすこと

   上の二つのことを通じて、物理学に対するアレルギーをなくしていきましょう。

なぜ物理学は難しいか？

「物理学は難しい」という感想をよく聞きます。これにはいくつかの理由があるように思いますし、それぞれには対策があります。私の気づいたことを書いてみます。

- 高校の物理学が難しい

  先にも書いたように、高校の物理学は、大学受験のために、暗記科目になってしまっています。覚えることが苦手な人は、もちろん、この段階で取り残されます。一方、とりあえず暗記して問題が解けることに自信のある人にも問題があります。逆に、ひねりが入って、考えなければ解けない問題は苦手になります。パターン以外は想定外だからです。

  ここでは、覚えることをできるだけ少なくして、基本から考える習慣を身につけたいと思っています。そうすれば状況はかなり改善するのではないでしょうか。

- 積み上げが多い

  他の学問は、途中からでも聞きかじることで何とかその部分を理解できることも多いと思います。しかし、物理学の場合には、基本を理解しないと、いくら後で心を入れ換えて追いつこうとしても、追いつくことが困難です。新しいことは、以前に学んだことを前提にしないと理解できないことが多いです。

  この講義では、そうしたことに慣れてもらうために、できるだけ項目を絞って、基本部分にかける時間を長くしています。その基本とは具体的には、**運動方程式**です。前半は、運動方程式を理解するための準備であり、後半は運動方程式を用いた応用が多くなります。

- 数式に慣れていない

  運動方程式を学ぶと、以外に日常生活でも体験する感覚と近いと感じると思います。逆に言って、日常的な体験を数式として表したものが運動方程式であると言えます。

  ところが、高校までの生活で、すっかり数式アレルギーになっている人は多いと思います。数学アレルギーにもいろいろな場合があると思います。しかし、私が感じるのは、文字で表された式に、具体的な値を入れて考えることを難しいケースです。

  例えば、**質量** m の物質に作用する**重力**は、**重力加速度** g を用いて、mg と表されます。それでは、地球の表面 (重力加速度 9.8 [m/s^2]) で、質量 1 [kg] の物体に作用する重力の大きさはどれくらいでしょうか。この段階で、ここで登場したこれらの言葉の意味はわからなくても構いません。しかし、言葉と記号は対応づけて欲しいと思います。どうでしょうか、1 [kg] $\times$ 9.8 [m/s^2] という式が思い浮かんだでしょうか。

  既にこのようなことに慣れている人は「何を馬鹿にしているんだ」と思うかもしれません。しかし、文字で表して一般化すること、また、このように一般的な式と具体的なモノを対応づけるて考えること、これらは実は非常に高度な人間の頭の作用です。もしもこの点が苦手だとしたら、自分でこれを意識して練習していきましょう。

1.2 物理学の教科書

このテキストはこの講義のためのものです。そこで、勉強が進むとこのテキストでは物足りないと思うかもしれません。そのような時は、是非、他の書物も読んでみてください。この講義で基礎を身につけておけば、読める書物の範囲は大幅に広がります。

物理学の教科書として、高校向けの物理の教科書を読むことは一つの選択肢です。先ほど書いたように、高校の物理学にはいろいろな制約があります。しかし、いろいろな人の目でチェックされているので、こなれた文章と内容になっています。

もう一つは、「基礎物理学 (第三版)」(**原康夫**, 学術図書出版, 2006) です。この本は、物理学全般について幅広く書いてあります。物理学は積み上げる部分が大きい学問です。そこで、時々、この先にどのような世界が広がっているのだろうか、と不安になることがあります。そんな時にこの本をめくると、いろいろな話題が目について、遠い先まで見えてくるように感じられるはずです。また、この本は、著者がしっかりと書いているので、信頼して読める本です。

その他にも、例えば**ガリレオ・ガリレイ**が書いた「**新科学対話**」といった古典的な書物や、日本の物理学者である**朝永振一郎**による「**物理学とは何だろうか**」といった随筆的な書物もお勧めです。是非、挑戦してみてください。

2　物理学とは

2.1　物理学の考え方

それではこれから**物理学**を学習していきましょう。

まず始めに、これから物理学を学んでいくに際して、物理学とは何かを考えてみましょう。なぜこのような話題からスタートするかというと、一つには、物理学を含む自然科学 (あるいはあらゆる学問全般) は、「定義」を重んじるからです。学問のなかで、議論をすることはとても大切です。しかし、あるテーマについて議論しているのに、考えている対象が人によって異なっていてはまともな議論はできませんね。そのため、ある単語が何をさしているのか、あらかじめ明確にする必要があります。「物理学とは何か」を考えるのは、その練習でもあります。もう一つは、あまりに高校の物理学の視野が狭いからです。高校で学習した物理学は、物理学には違いありません。しかし、内容はかなり限定的です。これまでの物理学の長い歴史の中で、既に研究しつくされたことをなぞっているだけです。もちろん、それは大切なことです。過去に調べられたものを吸収しておくことは、新しい対象を考えるときの道しるべにもなります。しかし、現在の高校の物理学はあまりに窮屈です。これは、わたし自身が大学で地球物理学を勉強した上での感想であり、研究活動を行っての感想であり、更に、改めて高校の物理学を見直した上での感想でもあります。

それでは物理学をどのように考えたらいいでしょうか。日本の物理学者で多くの功績を残した**朝永振一郎**[1]は、「物理学とは何だろうか」[2] の中で次のように述べています。

> われわれを取り囲む自然界に生起するもろもろの現象－ただし主として無生物にかんするもの－の奥に存在する法則を、観察事実に拠りどころをもとめつつ追求すること

このような認識は現在でも変わらないと思います。つまり、まず、物理学を定義することは難しいです。次に、生命そのものを扱うようなものとは、とりあえず一線を引いておく必要もありそうです。そして、この言葉が示しているように、物理学は、「何を」追求するかではなく、「どうやって」追求するか、というところに特徴があるということです。実際、物理学は、いろいろな科学の方法論としてとても広い範囲にいきわたっています。

例えば、私の知ってる物理学者[3]の一人は、水槽の下から泡が出てきた場合に、どのように上昇するかを研究しました。このような泡の対流は、もともとは、大

[1]朝永振一郎先生は日本で二番目にノーベル賞 (ノーベル物理学賞) を受賞した研究者としても知られています。もっとも、ノーベル賞を受賞したからといって偉い人ばかりとは限らないことには注意が必要です。

[2]岩波新書

[3]**木村龍治**先生です。ここでの「物理学者」は、やや広い意味で使っています。本人は物理学者とは名乗らないかもしれません。

気中の沢山の温かい空気の塊 (「サーマル」と呼ばれています。) による対流を見立てたものです。それを見たイギリスの別の物理学者は、「私は、水の中の微生物の集団的な動きを研究している。その微生物は、水面に上がっていこうとする性質がある。その微生物が水面近くに集まると、その部分が重くなって、下降流が起こる。その様子はあなたの実験とよく似ている。」と言いました。また、別の物理学者は、「地球内部の外核 (液体核) の部分では、鉄が冷えて粒となり、それが下降して内核 (固体の核) に沈んでいる。それに伴って対流が起きている。泡の対流の上昇流はこの現象によく似ている。」と言いました。

この例が示すことは、いろいろな現象の本質的な部分について、共通して語ることができる部分があることです。生命がかかわるような現象でも、また、大規模な大気の現象でも、地球内部の現象でも、その本質的な部分は同じだと考える人がいるということです。ひとつの現象の中に、それぞれの学者がそれぞれの現象を見ている訳です。そして、ひとつの室内で行う実験で、その本質を追求します。結果が得られれば、それは、色々な方面に応用できることが期待されます。このような考え方、あるいは調べる方法が物理学の考え方の特徴です。そしてこのような考え方はいろいろな方面に応用ができそうです。

大学の物理学では、このような考え方を大切にしていきたいものです。そして、こうしたことができるようになるために、物理学概論で準備をしていきたいと考えています。ただ、限られた時間の中で学ばなければならないことが多いので、必ずしも物理学の考え方について、十分な講義はできません。方法論としての物理学は、別の講義「自然科学基礎 (わたしたちと物理学)」の中で詳しく扱いますので、興味がある人はこちらの講義も受講してください。

この講義では、あまり枝葉の細かい部分には気を払わず、本質的と考えられるようなところ、また、理解しにくいと考えられるところとを重点的に扱います。更に、どうしても何らかの練習も必要になりますので、所々、練習問題を課して、皆さんの実戦的な力も身に着けてもらいたいと考えています。

2.2　物理学の分野

ここまで述べたように、物理学は、その考え方に特徴があります。

ところが、高校までの物理学や、既存の物理学の教科書には、そうしたことはあまり書いてありません。一方で、先に指摘したように、これまでの物理学で得られた成果を中心に書かれています。それは、一つには、物理学の考え方を学ぶためには、これまでの学問の歴史を知っておくことが重要だからです。また、私達の生活で用いる様々な技術が、こうした過去の物理学の研究の上に成り立っているからでもあります。いずれにしても、過去の研究の成果を知らないことはもったいないことです。

この講義では、物理学の考え方を大切にしながらも、過去の物理学の成果について学んでいくことにします。

初めに、これまでの物理学が、どのような分野に分類できるかを挙げてみましょう。

1. **力学**
   物体に作用する力と運動に関する分野を**力学**といいます。物理学の中で最も早い時期に研究が進みました。

2. **電磁気学**
   電気と磁気に関する分野を**電磁気学**といいます。さらに、この学問分野は二つに大別されます。一つは、**電荷**間に作用する**静電気**による力や**磁石**による**磁力**についての話題です。もう一つは、電荷の流れである**電流**に関する話題です。更に、電流に関する話題は、直流と交流に分けられます。電気と磁気の相互作用 (電流が**磁場**をつくり、磁場の変動が**起電力**をつくること) は、交流と深い関係があります。

3. **熱力学・統計力学**
   物質の**温度・圧力・体積**の間には、ある関係が成り立っています。これらの性質を使うことで、いろいろな物質の性質 (例えば、水の**蒸発熱**の温度変化の性質など) がわかります。こうした話題を扱うのが**熱力学**です。

   こうした性質は、物質が非常に数多くの**分子**で構成されていること、また、その分子が乱雑に運動していることを前提として理解することができます。このように小さな (ミクロな) 構成要素が数多く集まることで大きな (マクロな) 現象を理解しようとするのが**統計力学**と呼ばれる学問です。

4. **量子力学**
   力学や電磁気学はは私達の身の回りの現象や、天体の運動を考える上でとてもよく機能しました。ところが、非常に速度が大きい場合や、非常に小さい現象の場合には、それまでの力学 (それを**古典力学**といいます) ではうまく説明できない現象があることがわかってきました。

   原子程度よりも小さな現象を扱う場合には、別の枠組を考える必要がありました。**量子力学**はそのようにして生まれた学問です。量子力学の世界では、粒子だと考えていた**電子**を波として考える必要があったり、逆に波だと考えられていた光を粒子として考える必要があったり、また、観測によって結果が変わったり、と、やや常識とはかけ離れた世界を扱うことになります。

5. **相対性理論**
   一方、非常に高速で運動する物体の場合にも不思議なことが起こります。例えば、高速で運動する宇宙船の中では、地上にいる人からみると、時間がゆっくり進みます。そのような意味では、宇宙船に乗っている人は長生きするように見える訳です。このような現象を扱うのが**相対性理論**です。

   相対性理論の特徴のひとつは、いろいろな現象が理論的に予想され、その後に実験や観察で確かめられたことです。上に書いた時間の進み具合についてもそうでした。そのような意味で、とても興味深い学問分野です。

ここでもう一度強調しておきますが、こうした分野への分類は、これまでの物理学の成果に基づいています。物理学の特徴は、その考え方にありますので、これらの枠に入らない、全く新しい物理学がこれからも誕生していくでしょう。実際、これまでの統計力学の枠組を越えた「複雑系科学」などと呼ばれる研究はどんどん進展しています。これまでの物理学の成果をなぞることは、新しい更にその先の物理学を切り開くための準備であると考えていいでしょう。

3　量と単位

3.1　物理量と単位

前章で述べたように、定義を明確にすることは大切です。ここでは、「量」について考えます。

ある物理学的な対象を言葉で表現して人に伝える場合に、**定量的**な表現と、**定性的**な表現とがあります。前者は数値で表すもので、後者は数値を用いずに表すものです。例えば、**速さ**を表すことを考えましょう。定性的に「速い」「遅い」といった表現で速さを表すことも可能です。また、定量的に、「時速 30km」と、数値で表すことも可能です。物理学では、誰でも同じような受けとめ方ができるように、つまり、「**客観的**」に情報が伝わるように、定量的な表現をすることが圧倒的に多いです。

物理学で扱う量は、「**物理量**」といいます。誰が測っても同じになるもの、また、そうした量を基に計算して得られた量が物理量です。物理量は数値と**単位**で構成されます。例えば、「時速 30km」あるいは、「毎時 (まいじ)30km」というのは、「30」という数値と、「km/時 (キロメートル毎時、あるいは、キロメートル・パー・アワー、などと読みます。)」という単位で構成されます。

「単位」について、簡単に復習しておきましょう。例えば、2[m] は、1[m] の 2 倍の長さを表しています。3.5[m] は、同様に、1[m] の 3.5 倍の長さを表しています。このように、何かの量を単位を用いて表した場合、その単位の前に "1" をつけた量の何倍であるかを意味しています。その単位の前に "1" をつけた量を基準にして、何倍の値であるかを表したものが、単位の前の数値という訳です。

3.2　単位系

速さは、一定の時間内にどれだけの距離を進んだかで表されますから、時間にどのような単位を用いるか、また、距離にどのような単位を用いるか、によって、速さの単位が変わってきます。速さの単位が時間と距離の単位を組み合わせて作られているように、別の単位から組み合わせて作られる単位があります。そのような単位を**組み立て単位**といいます。一方、組み立て単位に用いるような、基本的な単位を**基本単位**といいます。

では、どのような単位が基本単位でしょうか。どのような単位を基本単位と選ぶかは、流儀によって異なります。しかし、現代の物理学では、ほとんどの場合、**国際単位系** (**SI**) を用いることになっています。SI では次の 7 つの単位を基本単位としています。

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)
電流	A	**アンペア**
温度	K	**ケルビン**
物質量	mol	**モル**
光度	cd	**カンデラ**

その他の単位は組み立て単位として表します。例えば、面積は [m^2] (平方メートル) です。密度は、単位体積あたりの質量ですから、[kg / m^3] (キログラム毎立方メートル) です。

ところが、このような単位だけでは扱いが難しいことも多々あります。例えば、地球規模の現象を考えてみましょう。地球一周の大きさは、およそ 40000000m です。ゼロが多くて扱いが大変です。そこで、次のような **SI の接頭辞**を用いることが多いです。

P	1000000000000000	10^{15}	**ペタ**
T	1000000000000	10^{12}	**テラ**
G	1000000000	10^{9}	**ギガ**
M	1000000	10^{6}	**メガ**
k	1000	10^{3}	**キロ**
h	100	10^{2}	**ヘクト**
da	10	10^{1}	**デカ**
d	0.1	10^{-1}	**デシ**
c	0.01	10^{-2}	**センチ**
m	0.001	10^{-3}	**ミリ**
µ	0.000001	10^{-6}	**マイクロ**
n	0.000000001	10^{-9}	**ナノ**
p	0.000000000001	10^{-12}	**ピコ**
f	0.000000000000001	10^{-15}	**フェムト**
a	0.000000000000000001	10^{-18}	**アト**

例えば、2000[m] は 2[km] のように書きます。0.05[m] は、5[cm] のように書きます。ただし、習慣によってよく使う場合とあまり使わない場合があります。先ほどの例にあげた地球 1 周の長さは、40[Mm] ですが、このような表現はあまりしません。40,000 [km] ということの方が多いです。

物理量には、正確に表現すると単位が無いものもあります。例えば、角度を表現するときの**弧度法**です。角度を表すには、0 度〜360 度まで「度」を用いて表す**六十分法**と、半径 1 の円周を考え、その角を中心角としたときの弧の長さ (0〜2π, π は円周率で 3.14159265359…) で角度を表す弧度法があります (図 1)。弧度法の単位は**ラジアン**です。しかし、この定義からして、弧度法で表されるものは弧の長さと半径との比ですから、本来は単位が無い物理量です。しかし、弧度法で表し

た角度であることが明確にわかるように、「ラジアン」をつけることが習慣となっています。

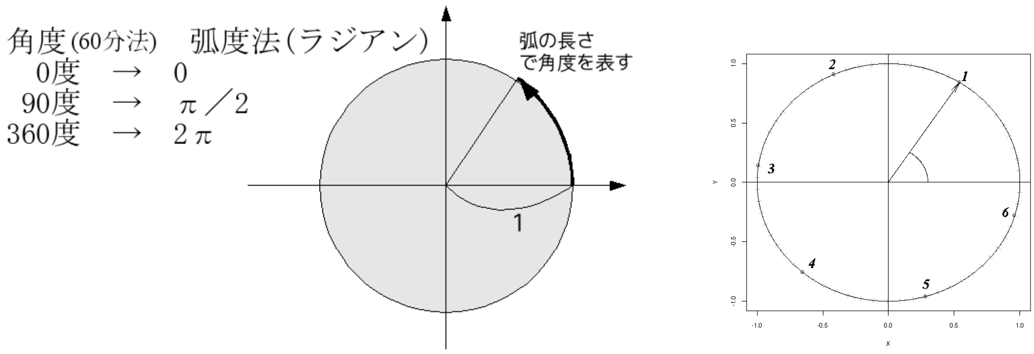

図 1: 弧度法について

また、他の例もあります。1 秒間に何回振動したか (これを**周波数**といいます) を表すのに [Hz] (**ヘルツ**) を用います。例えば、私たちが日常使っている電気 (関東以北の場合) は、1 秒間に 50 回振動しますから、50 Hz と表現します。これも、実際には回/s が単位になります。この「回」も、単に回数を数えただけですから、本来、物理量の単位とは言えませんし、周波数の単位も [1/s] でいいはずです。しかし、他の量と区別するために、[Hz] を用いることが多いです。これは弧度法と同様です。

これらの例のように、やや性質の異なる単位もあるので注意が必要です。

なお、SI 以外の単位系がありますので、それについて触れておきましょう。

1. **MKSA 単位系**

   SI の前身となった単位系です。次の基本単位は SI と共通です。

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)
電流	A	アンペア

   これらの基本単位の頭文字をとって MKSA 単位系と名付けられています。

2. **CGS 単位系**

   次のような量を基本単位としています。

長さ距離	cm	センチメートル
質量	g	キログラム
時間	s	秒 (セカンド)

   CGS 単位系という名前は、これらの頭文字に由来します。

   歴史が長く、また小型の実験装置を考える場合には具合がいいので今でも利用している物理学者がいます。

最後に単位の書き方についてです。単位は [ ] で囲んで書くことが多いです。以下ではこのルールに従って書くことにしましょう。

課題

1. 光の速さはおおよそ 300000000 [m/s] です。東京–熱海間を 100km とすると、東京から出た光が熱海に到達するにはどれくらい時間がかかるでしょうか。
   ここで、次のような注意をしましょう。
   (a) 単位についても計算が成り立つことに注意しましょう。
   (b) 単位をそろえて計算することに心がけましょう。
   (c) 計算途中でも単位をつけて書くように心がけてみましょう。
2. ある計算機は、1 秒間に 3000000000 回計算できるとします。1 回計算する間に、光はどれくらい進めるでしょうか。
   ここに書いたような数字にも単位をつけて、3000000000 [回/s] とすることができます。

3.3　単位の換算

いろいろな単位が現れると混乱しがちです。そこで、簡単な単位の換算についてはスムースにできるようにしておきましょう。例えば、水の**密度**を考えてみましょう。おそらく、皆さんの中には、「水の場合、体積 1[ℓ](**リットル**) に対して**質量**はおおよそ 1[kg]」であることを知っている人が多いでしょう。そこで、水の密度は 1 [kg/ℓ] と表現することができます。ところが、「ℓ」は SI ではあまり用いない単位です。そこで、これ (1 [kg/ℓ]) を SI らしい単位 [kg/m^3] に換算してみましょう。

これを次のようにステップごとに求めてみます。

1. 1[m] は何 [cm] か

   接頭辞 [c] が 0.01 を表すことを考えると、[cm] というのは、“0.01m” を単位とした長さと考えることができます。そこで、わかりやすさのために、次のような表現にしてみます。

$$
\begin{aligned}
1[\mathrm{cm}] &= 1[0.01\mathrm{m}] \\
&= 0.01[\mathrm{m}] \\
100[\mathrm{cm}] &= 100[0.01\mathrm{m}] \\
&= 100 \times 0.01[\mathrm{m}] \\
&= 1[\mathrm{m}]
\end{aligned}
$$

   といった具合です。[0.01m] という表記は正式のものではありません。しかし、考え方を説明するために仮りにこのように書いてみました。また、この

ような考え方からわかるように、1[0.01m](0.01m を基準としてその 1 倍) は 0.01[m](1m を基準として、その 0.01 倍) です。単位を表す [ ] の中の数字は、外に出して単位の前に書かれた数値と掛け算することができます。

2. $1[\mathrm{m}^3]$ は何 $[\mathrm{cm}^3]$ か

   1 辺が 100[cm] の立方体の体積は、$100 \times 100 \times 100\ [\mathrm{cm}^3] = 1000000\ [\mathrm{cm}^3]$ です。これも、

$$\begin{aligned} 1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1000000[(0.01\mathrm{m})^3] \\ &= 1000000[(0.01 \times 0.01 \times 0.01)\mathrm{m}^3] \\ &= 1000000 \times 0.000001[\mathrm{m}^3] \\ &= 1[\mathrm{m}^3] \end{aligned}$$

   と考えることができます。($(0.01\mathrm{m})^3$ の部分の計算については後ほど詳しく扱います。)

3. $1[\mathrm{m}^3]$ は何 $[\ell]$ か

   みなさんは

$$\begin{aligned} 1[\ell] &= 1000[\mathrm{cc}] \\ &= 1000[\mathrm{cm}^3] \end{aligned}$$

   ということを知っていると思います。そこで、これまでの結果を整理すると次のような関係があります。

$$\begin{aligned} 1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\mathrm{m}^3] \\ 1000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\ell] \end{aligned}$$

   2 番目の式を 1000 倍すると次のようになります。

$$\begin{aligned} 1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1[\mathrm{m}^3] \\ 1000000[\mathrm{cm}^3] &= 1000[\ell] \end{aligned}$$

   そこで、$1[\mathrm{m}^3] = 1000\ [\ell]$ です。あるいは、先ほどと同様に、考え方を示すための表記として、次のように書いてみます。

$$\begin{aligned} 1[\mathrm{m}^3] &= 1000[\ell] \\ &= 1000\left[\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3\right] \end{aligned}$$

   $[\ell]$ という単位が $\left[\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3\right]$ と同じであるとわかるように書いてみました。

4. 水の密度 1 [kg/ℓ] は 何 [kg/m^3] か

   次に同じようなやり方で水の密度を考えましょう。

$$\begin{aligned}1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\ell}\right] &= 1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\frac{1}{1000}\mathrm{m}^3}\right]\\ &= 1\left[1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\\ &= 1000\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\end{aligned}$$

   このような計算をしなくても、「1[ℓ] で 1[kg] なのだから、1000[ℓ] で 1000[kg] で、1000[ℓ] が 1[m^3] だから、1000[kg/m^3]」と考えられれば、その方が簡単です。ただ、混乱したときや、面倒な計算をするときには、どのように考えたらいいか、その考え方を身につけておくことは必要です。

課題

空気の密度は、おおよそ 1.2 [kg/m^3] です。これを [g/ℓ] に変換してみましょう。

3.4 指数法則

単位の換算では、たくさんのゼロ (0) が出てきました。このように沢山のゼロが出てくるような計算では、ゼロの数を数えなければならず、とても大変です。そこで、最初からゼロの数を書いておいた方が便利です。例えば、1000 を 10^3 と書きます。このような書き方をしたとき、数字の右肩に書く数字を**指数**といいます。正確には、指数は、同じ数を何度かけ合わせるか、を表す数字です。先ほどの場合は、ゼロの数が重要なのではなく、10^3 は、$10 \times 10 \times 10$ を意味するのでゼロの数と一致するのです。例えば 5^3 という書き方では、$5 \times 5 \times 5$ を意味します。

指数には、次のような規則 (**指数法則**) があります。

1. $A^p A^q = A^{p+q}$

   A を p 回かけ合わせたものと、A を q 回かけ合わせたものとをかけ合わせると、合計で、$p+q$ 回かけ合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

$$\overbrace{A\cdots A}^{p\text{ 個}} \times \overbrace{A\cdots A}^{q\text{ 個}} = \overbrace{A\cdots A}^{p+q\text{ 個}}$$

2. $\dfrac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$

同様に、A を p 回かけ合わせたものを、A を q 回かけ合わせたもので割ると、合計で、$p-q$ 回かけ合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

$$\overbrace{A\cdots A}^{p\text{個}} \div \overbrace{A\cdots A}^{q\text{個}} = \overbrace{A\cdots A}^{p-q\text{個}}$$

3. $A^0 = 1$

   上の法則で $p=q$ の場合、$\frac{A^p}{A^p} = A^{p-p} = A^0$ となります。ところがこれは 1 です。そこで、$A^0 = 1$ と決めておくと都合がいいです。

4. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$

   $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$ で、$p=0$ とすると、$\frac{1}{A^q} = A^{-q}$ となります。そこで、このように定義すると都合がいいです。

5. $(AB)^p = A^pB^p$

   A と B の積全体をひとかたまりとして、それを p 回かけ合わせたものは、A を p 回かけ合わせたものと B を p 回かけ合わせたものの積です。

$$\overbrace{(AB)\cdots(AB)}^{p\text{個}} = \overbrace{A\cdots A}^{p\text{個}}\overbrace{B\cdots B}^{p\text{個}}$$

6. $(A^p)^q = A^{pq}$

   A を p 回かけ合わせたもの全体をひとかたまりとして、それを q 回かけ合わせたものは、A を $pq = p\times q$ 回かけ合わせたものです。

$$\overbrace{(A^p)\cdots(A^p)}^{q\text{個}} = \overbrace{A\cdots A}^{pq\text{個}}$$

7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$

   平方根 $\sqrt{A}$ について、$(\sqrt{A})^2 = A$ です。また、$(A^{\frac{1}{2}})^2 = A^1 = A$ ですから、$\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$ とすると好都合です。同様に、立方根 $\sqrt[3]{A}$ は、$(\sqrt[3]{A})^3 = A$ ですから、$\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$ です。

このような性質を使うと、特にゼロが多い場合の計算はとても簡単になります。たとえば、次のようにします。

$$\begin{aligned} 10^6[\mathrm{cm}^3] &= 10^6[(10^{-2}\mathrm{m})^3] \\ &= 10^6[10^{-6}\mathrm{m}^3] \\ &= 10^6\times10^{-6}[\mathrm{m}^3] \\ &= 1[\mathrm{m}^3] \end{aligned}$$

4 力学

物理学の長い歴史を考えた時、現代の物理学に直接つながるようなルーツは、誰の研究でしょうか。これについては、いろいろな考え方があると思います。私は**ガリレオ・ガリレイ**[4](1564-1642) を挙げます。それは、初めて、「仮説を実験で確かめる」という方法を確立した人だからです。ガリレオの研究の中で、最も重要と考えられるのは、物体の運動に関する研究です。ガリレオ・ガリレイの没後、**アイザック・ニュートン** (1643-1727) が生まれました。**ニュートン**によって確立されたのは「**力学**」あるいは「**古典力学**」と呼ばれる学問です。この学問は、**ガリレオ**の研究を進展させ、天体を含む物体の運動を対象としたものでした。その法則は現在でもそのまま使われています。このように、力学は、物理学の中で最初に研究が進んだ学問分野です。

また、物理学を勉強すると、力学とは関係のない現象についても、力学で用いた考え方をそのまま適用できる例が数多くあります。そのような意味でも、力学は物理学の最も基礎的な分野であると言えます。

4.1 運動の記述

物理学で扱う様々な量は、**物理量**として表すことで扱えるようになります。力学の場合には、物体の運動の様子を上手にあらわしてやる必要があります。

4.1.1 座標系

運動の様子を表すには、まず、場所を表す必要があります。では、どのように場所を表したらいいでしょうか。そのためには、まず、基準になる点を決めて、その点からの「ずれ」で表現するといいでしょう。その基準になる点を**原点**あるいは**座標原点**と呼びます。

原点からのずれはどのように表したらいいでしょうか。たとえば、原点から東に x[m] 移動し、そこから北に y[m] 移動し、更に上に z[m] 移動するという表現ができそうです。もちろん他にも方法は沢山あります。しかし、このようにする方法はもっとも簡単です。まとめると、次のような方法です。

1. ある地点を原点とする。
2. 原点から東への移動量 x、北への移動量 y、上への移動量 z をとる。

   x と y については、特に東と北でなくてもいいです。しかし、このように、

   - x, y は水平面内にとり、z は鉛直上向きにとる
   - y が正の向きは x が正の向きの左側 (x が正の向きは y の正の向きの右側) にとる

[4]最近は小説やマンガ、テレビドラマ等で知名度が高まったようです。

ようにするのが普通です (図 2 の右側)。

こうすることで、位置を決めることができます。三つの量を与えることで位置が決まるような空間の広がりを**3 次元**といいます。ちなみに、2 次元は二つの量で位置が決まる「面」に対応し、1 次元は一つの量で位置が決まる「線」に対応します。

x の方向に沿った原点を通る直線を x **軸**といいます。x 軸は向きを考えます。つまり、正の向き (x の値が増える向き) と負の向き (x の値が減る向き) があります。x 軸上の点の原点からのずれを x **座標**といいます。その点が原点から正の向きにずれていれば x 座標は正で、負の向きにずれていれば、x 座標は負です。

y, z についても同様です。原点と x 軸,y 軸,z 軸 を合わせた位置を表す仕組みを**座標系**[5]といいます。

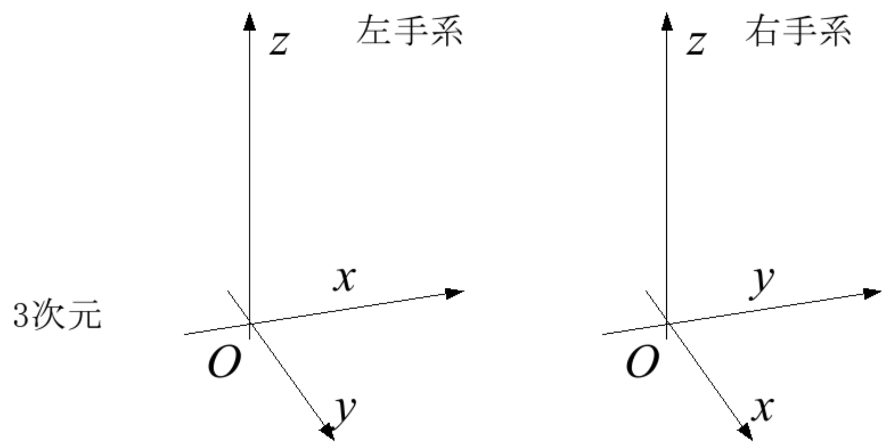

図 2: 座標系 (右手系と左手系)

コラム：右手系と左手系

x 軸と y 軸のとり方について、y 軸の正の向きが x 軸の正の向きの左側になるようにとるのが普通だと述べました。このように設定した座標系を**右手系**といいます。x, y, z の順に、親指、人差指、中指を対応させることができるからです。x 軸と y 軸を入れ換えると、(普通の人では) 右手で対応させることができず、左手なら同様に対応させることができます。そのような意味で、これを**左手系**といいます (図 2)。

両者は互いに鏡に写した像のような関係 (鏡像関係) で、3 つの軸を重ねることができません。

私たちは余程の理由が無い限り、右手系を使うことになっています。

[5] より正確には「**直交座標**」

4.1.2　位置ベクトル

座標系を決めることで、位置を表すことができるようになりました。x 座標、y 座標、z 座標を書き並べたものを**位置ベクトル**といいます。位置ベクトルは

$$(x, y, z)$$

のように書くこともあります。これは**横ベクトル**として書かれた位置ベクトルです。あるいは、**縦ベクトル**として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書くこともあります。

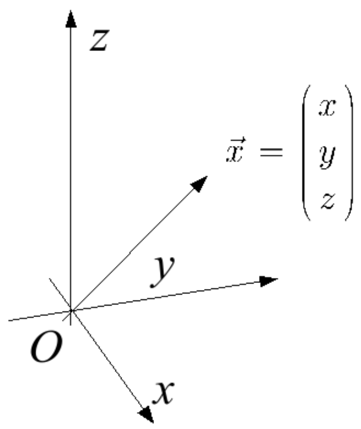

図 3: 位置ベクトル

一般に、図 4 のように大きさに加えて向きを持ったものを**ベクトル**といいます。

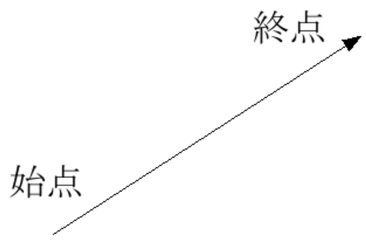

図 4: ベクトル

この図で、矢印で描いたベクトルの根元を**始点**、先端を**終点**といいます。ここで、強調しておきたいのは、ベクトルは始点を選ばないということです。平行に移動して一致する矢印は全て同じベクトルと考えます。

位置ベクトルはベクトルのひとつです。位置ベクトルの場合には、原点を始点として描くのが普通です。ベクトルは上に書いた位置ベクトルと同じように、数

字を書き並べて表すことができます。これらの数字一つ一つを**成分**といいます。あるいは、ベクトル全体を一つの文字で表すこともよくあります。ベクトルでない普通の量 (**スカラー**といいます) と区別するために、太文字にするか、上に矢印をつけます。例えば、

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

あるいは、

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

といった具合です。矢印のようなもの、あるいは、数字の集まりを一つの文字で表すのは変な気がするかもしれません。しかし、このベクトルには演算ができるので、文字で書いておく方が便利なのです。次に、その演算について説明します。

4.1.3 ベクトルの演算

スカラーについて四則演算 $(+, -, \times, \div)$ があるように、ベクトルにもいくつかの演算があります。以下では、$\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{q} = (u, v, w)$ とします。

1. スカラー倍

   ベクトルの向きはそのままに、長さを a 倍する演算です。

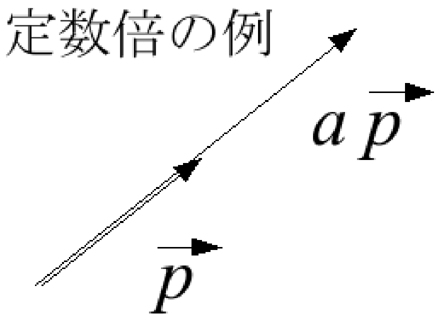

図 5: ベクトルのスカラー倍

成分で書いてみましょう。

$$a\vec{p} = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

長さが a 倍になると、各成分も a 倍になります[6]。

2. 足し算

もっとも重要な演算はベクトルの足し算です。

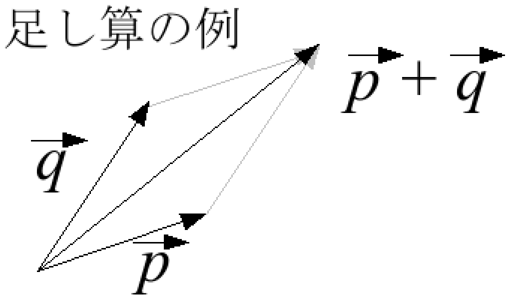

図 6: ベクトルの足し算

$$
\begin{aligned}
\vec{p}+\vec{q} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

原点から東、北、上へ、それぞれ x[m]、y[m]、z[m] 移動した地点から、更に東、北、上へ、それぞれ u[m]、v[m]、w[m] 移動した地点を考えます。すると、最終的な到達地点は、原点から東へ $x+u$[m]、北へ $y+v$[m]、上へ $z+w$[m] ずれた点になるはずです。上に示したベクトルの足し算は、このように意味づけられます。

図で表すと、$\vec{p}$ の終点と $\vec{q}$ の始点を一致させたとき、$\vec{p}$ の始点と $\vec{q}$ の終点からなるベクトルが $\vec{p}+\vec{q}$ となります。あるいは、同じことを別の表現で表すと、$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の始点を一致させたとき、ふたつのベクトルで作る平行四辺形を考えて、共通の始点を始点とし、新たに作られた対角の頂点を終点とするようなベクトルである、とも言えます (図 6)。

3. 引き算

足し算が定義できると引き算を定義するのは比較的簡単です。$\vec{r}-\vec{p}$ は、$\vec{p}$ を -1 倍してから $\vec{r}$ に加えればいいからです。これは、成分で表すと、成分同士の引き算をすることを意味します。

しかし、それでは何のことかよくわかりません。そこで、上で用いた足し算の例を活用したいと思います。$\vec{r}$ を $\vec{r}=\vec{p}+\vec{q}$ とします。すると、$\vec{r}-\vec{p}=\vec{q}$ です。

[6] これは、原点と位置ベクトルの終点を対角とする直方体を考えると、位置ベクトルが a 倍されると、相似比 1:a の 直方体ができることからもわかります。

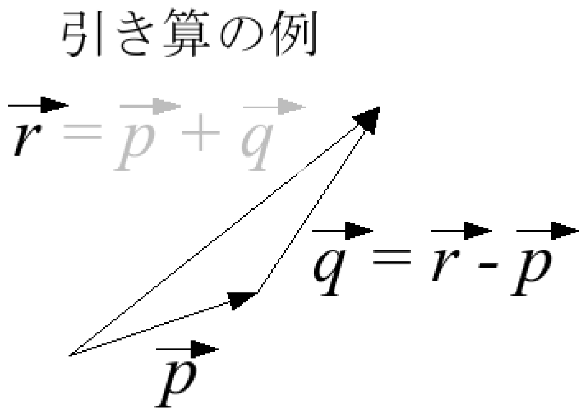

図 7: ベクトルの引き算

図で、$\vec{r}$と$\vec{p}$を位置ベクトルと考えましょう。すると、$\vec{r}-\vec{p}$が表すものは、「位置ベクトル$\vec{r}$が表す位置を、$\vec{p}$の終点を原点として位置ベクトルで表したもの」になっていることがわかると思います。つまり、$\vec{p}$の終点を基準として$\vec{r}$の示していた位置を表したものが$\vec{r}-\vec{p}$となっています。

このように、引き算は、あるもの (ここでは$\vec{r}$) を別のものの (ここでは$\vec{q}$) を基準にとり直したときにどのようになるか、を表すことが多いです。この点を覚えておきましょう。たとえば、原点から 5[m] の地点は、原点から 3[m] の地点を原点にとり直すと、5[m]-3[m] = 2 [m] となります。

ここまで、ベクトルの足し算、引き算、スカラー倍を学んできました。成分で見ると、成分同士の足し算であったり引き算であったり、定数倍であったりしますので、それほど違和感は無いと思います。

4.1.4 運動の表現

物体の位置を表すことができるようになりました。それでは、今度は物体の運動をどのように表したらいいでしょうか。運動を表す時のポイントは、場所と時刻です。ある時刻に、物体がどこにあるのか、それがわかれば、物体の運動がわかったことになります。つまり、物体の場所を「時間の関数[7]」として表せばいいのです。私たちが通常、動きのあるものを記録する場合には、よく、ビデオカメラで映像 (動画) として撮影します。時間の関数として位置を表すとは、正しく、ビデオに録画するような場合です[8]。動画を残すような方法は、運動の様子を記録するにはとても有力な方法です。

しかし、実際に物体の運動を考える場合には、ビデオ撮影は必ずしも都合がいいとは限りません。一つには、私たちが扱う時間が、例えば 30 億年であったり、

[7]「y が x の関数である」とは、x が与えられると (決まると)、y が一通りに決まるような関係をいいます。この場合は、時刻が決まると場所が決まることを意味しています。

[8]残念ながら奥行きについての情報は無くなってしまします。しかし、将来は、立体映像を記録し、立体映写機で 3 次元的な映像を映し出すことができるようになるかもしれません。

1 as (アト秒) であったりするからです。もっとも、これは、時間の縮尺を変えて、早回しで再生したり、逆に、ゆっくり再生すればいいでしょう。別の理由は、私達の脳の働きです。残念ながら、私達の脳は、動画を処理するよりも、静止した映像 (静止画) を処理することに向いているようです。つまり、異なる時刻の状態が一度に見えていないと、運動の様子を適切に理解できません。そこで、時間による変化を 1 枚の画像に納める必要があります。

例えば、朝、家を出てから大学に着くまでの自分自身の運動 (「体操」という意味ではなく「移動」という意味の運動) を考えてみましょう。人間はあまり鉛直方向には移動しませんから、上空から見下ろした地図を描き、その上に、各時刻で自分がいた位置を記していきます。すると、自分の運動が時間の関数として記述できました。いろいろな時刻での場所を、同じ図面の上に描くことで、位置の変化を 1 枚の画像に表すことができました。

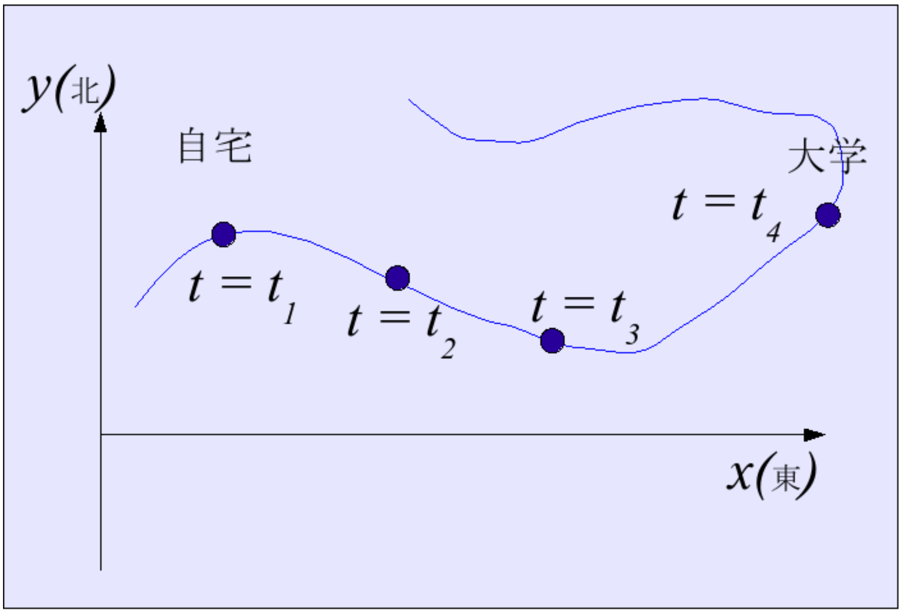

図 8: 自宅から大学までの運動の様子

しかし、定量的に扱うには、もう少し工夫をすることができます。ここで示した表し方では、一定の時間の後にどれだけ移動したか、ということがわかりません。移動した量は見ただけでおおよその見当がつきます。ところが、時間間隔については、いちいち時刻の値を読んで頭の中で計算しなければならず、わかりにくいです。そこで、今度は時刻の変化量も長さとして表してみましょう。

例えば、ボールを落とすビデオを撮影したときのことを考えます。ボールの高さの時間変化がわかるように、まず、ビデオを構成する画像 1 枚 1 枚のボールの移っている部分を切り出します (図 9 左)。次に、それを横に並べていきます。こうすることで、横方向の長さが時間に対応します。そして、高さの時間変化がわかるようになります (図 9 右)。

また、東京駅を出発した新大阪行きの新幹線を例にとって図にしてみましょう

図 9: ボールが落下する様子を移したビデオの一場面 (左) と、各画像からボールの部分を短冊状に切り出した画像を並べたもの (右)

(図 10)。このようにすることで、時間の変化量と位置の変化量の両方を見やすくすることができます。

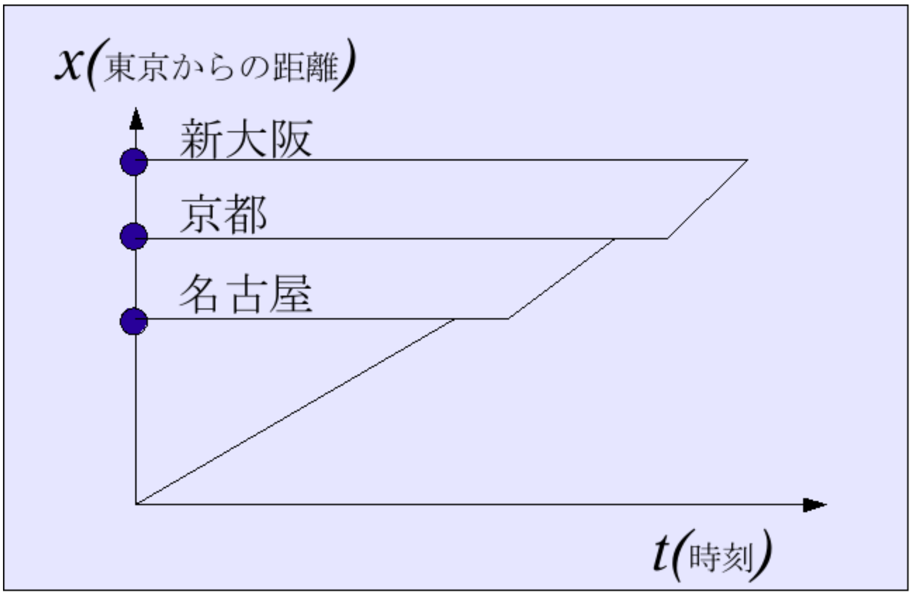

図 10: 時間の関数としての移動距離

しかし、次のような点で注意が必要です。まず、一つ目は、忘れてならないのは、このような表し方が一面的であることです。新幹線の例では、東京駅と名古屋駅と新大阪駅は直線上にありません。標高も違うでしょう。それを 1 つの直線で表すことができたのは、本来あるべき多くの情報を削り落とし、「東京駅からの距離」という量だけに絞ったからこそ、可能になったのです。ボールの例の場合にも、左右方向にも奥行きの方向にもボールの位置がほとんど変化していないので、それらについて調べる必要は無かった訳です。

二つ目は、どのような量に絞るか、です。新幹線の場合には東京駅からの距離が重要です。それが料金に直結しているからです。ところが、実際には複数の量が必要になる場合も多いです。例えば、山手線の窓を開けて、電車で走りながら気温の変化を測る場合には、東西南北、更に高度も含めて、位置の情報が重要になるでしょう。そのような場合には、一つの量だけで位置の変化を代表させるの

は難しいです。そして、位置ベクトルの三つの成分それぞれについて、その値と時間の変化をそれぞれ描くことが必要になります。

課題 1

皆さん自身の今朝目が覚めてから大学に到着するまでの運動を、東向きを横軸に、北向きを縦軸にとって図に示してみましょう。

課題 2

横浜線が八王子駅を出てからの様子を、横軸に時刻、縦軸に八王子からの距離をとって図示してみましょう。

以下では練習も兼ねて簡単な運動から考えるようにしましょう。

4.2　等速直線運動の表現

直線上を一定の**速度**で移動する運動を**等速直線運動**といいます。先に述べた運動の記述のし方にならって、二通りの方法で運動の様子を図にしてみます。一つは、地図にいろいろな時刻の場所を時刻と共に記していく方法で、もう一つは、横軸に時間をとる方法です (図 11)。

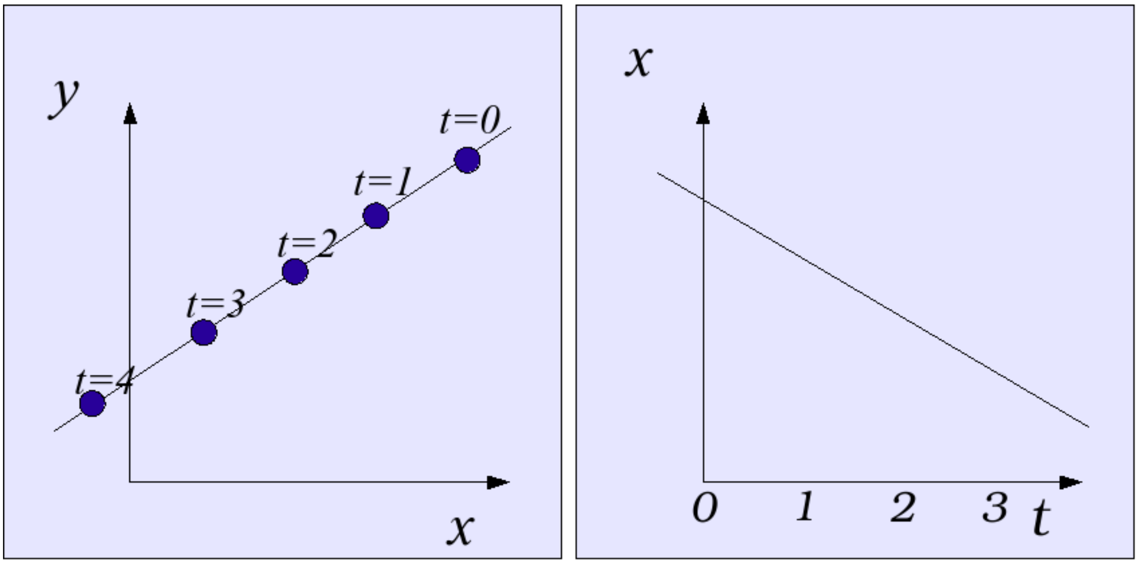

図 11: 等速直線運動

このように二通りで表すことができます。さて、これらの図で、**速さ**はどのように表されるでしょうか。左の図では、時刻の数値を読みながら考えないと速さはわかりませ。それでは、右の図ではどうでしょうか。この図では、速さは傾きとして表されます。一定の時間が経過 (一定量横軸に沿って移動) した場合に、どれだけの距離進むか (縦軸に沿って移動するか)、を考えると、それは直線の傾き

に対応していることがわかります。つまり、傾きが大きい程速く、傾きが小さい程遅くなります。(図では傾きが「負」であることに気をつけてください。)

ここで、**グラフの傾き** (あるいは**傾き**) について復習しておきましょう。傾きが急だとか、ゆるやかだとかは、よく、(**六十分法**の) 角度で表します。この方法は小学校以来、慣れていると思います。しかし、角度を使うのは適当ではありません。それは、角度と速さは比例しないので、扱いにくいからです。もう一つ、よく使われるのは、割合で表す方法です。例えば、交通標識で、急な坂道であることを示す場合に、斜面の傾きを "%" を使って表しています (図 12)。これは、水平方向に 100 [m] 移動した場合に、何 [m] 鉛直方向に移動したかを表しています。

図 12: 道路標識

このような考え方はグラフの傾きを考える場合にも使えます。つまり、図 11 で、時間が Δt だけ変化したときに、座標が Δx だけ変化したとき、$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ で傾きを表せます。これは、単位時間当たりの進む距離にあたりますから、速さです。このような傾きの定義ならば、傾きと速さが一致し、好都合です。

4.3　グラフの傾きと微分

上の例では、グラフの傾きが一定だったのでグラフの傾きを扱うことは簡単でした。しかし、一般的にはグラフは直線ではありません。傾きは、グラフの場所によって変わっています。

こういった場合の傾きはどのように考えることができるでしょうか。一番、簡単には、グラフ上の各点でグラフに接する接線を引き、その傾きをその場所での傾きとする考え方です。では、接線を決めるためにはどうすればいいでしょうか。そして、その接線の傾きを決めるにはどうしたらいいでしょうか。

ある点 (A) のグラフの接線を考えて、その傾きを決めるためには、その点のすぐ近くの点 (B) をとり、A と B を結んでできる直線の傾きを考えれば、求める傾きにとても近いはずです (図 13 左)。そして、B を A に近づければ近づけるほど、A B を結ぶ線は接線に近づきます。そして、その傾きは「A 点での傾き」に近づくはずです (図 13 右)。B を A に近づけた**極限** (B は A と一致はしていないが、

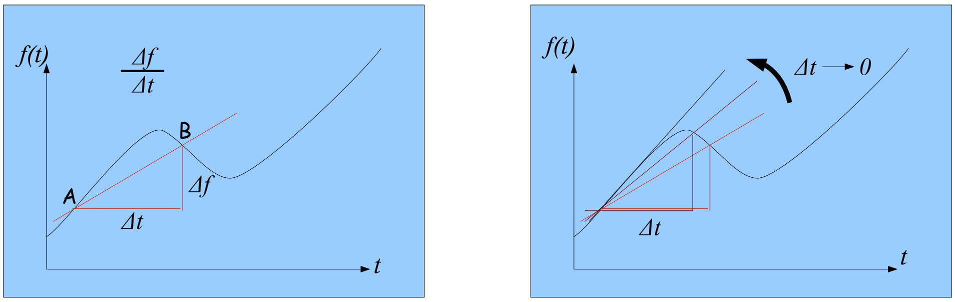

図 13: 点 A 点 B の間を直線で結んだときのグラフの傾き

両者の間の距離は限りなく 0 に近づけた状態) での傾きを**微分係数**といいます。また、このグラフを与えている関数 $f(t)$ から、微分係数を t の関数として求めることを (関数 $f(t)$ を時間 t で) **微分**するといいます。

以上は、微分の意味です。こうしたことを簡潔に記号で表した方が扱いやすいので、次のように表記する決まりがあります。こうした表記にも慣れておきましょう。まず、極限についての表記です。「Δt を限りなく 0 に近づける場合」を

$$\lim_{\Delta t \to 0}$$

で表現します。そして、「Δt を限りなく 0 に近づける場合の $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ の値」を

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

と表します。次に、微分についての記号です。関数 $f(t)$ を t で微分して得られた関数を $\frac{df(t)}{dt}$ あるいは、$\frac{d}{dt}f(t)$ などと表します。普通の分数では、分子にあるものは、かけ算で表すこともできます。それと同様に、微分で上に書いてあるものは、それよりも後ろに書いても構いません。また、t で微分していることから、f は t の関数であることを前提にしていることは明らかです。そこで (t) を省略して、$\frac{df}{dt}$ とも書きます。

微分 $\frac{df}{dt}$ は、傾き $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ について、Δt をゼロに近づけた時の値として定義されます。そこで、次のような式が成り立ちます。

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \tag{1}$$

コラム：なぜ微分を考えるのか？

数学や物理学で「微分」や「積分」がでてくると、それだけで嫌な感じがしてしまう人も多いと思います。ただ「接線の傾き」を求めるだけなのに、なぜ、こんなに大騒ぎするのでしょうか。

その理由の一つは、微分が計算できてしまうことにあります。例えば、$f(t) = t^3$ の場合、$\frac{df}{dt} = 3t^2$ になります。一般に、$f(t) = t^n$ の場合、$\frac{df}{dt} = nt^{n-1}$ となります。このように、微分には計算の規則があって、多くの場合、計算できてしまうのです。これは便利な性質です。この性質を沢山活用するので、微分が登場することも多い訳です。

課題

1. $x-t$ それぞれのグラフについて、グラフが表す関数をを微分してできる関数のグラフを中段のグラフに描き入れてみましょう。また、中段のグラフで表される関数を微分してできる関数のグラフを下段に描き入れてみましょう。

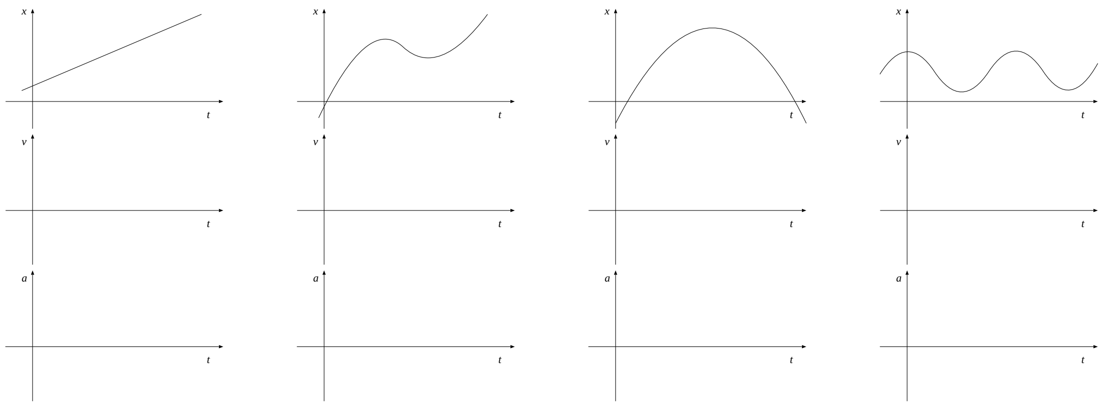

図 14: 微分の練習

4.4　位置と速度と加速度

微分を用いることで、グラフの傾きをきちんと定義することができました。そこで、微分を使って**速度**について考えることにします。

一般に、位置は位置ベクトルで表すことができます。そして、位置ベクトルは、通常、3 次元です。ある時刻 t の位置ベクトルを $\vec{p}(t)$ とし、Δt だけ時間が経過した時刻 $t+\Delta t$ の位置ベクトルを $\vec{p}\,(t+\Delta t)$ と表すとします。時間 Δt の間の位置ベクトルの変化は、$\vec{p}(t)$ を基準にして、$\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}(t)$ です。このように位置ベクトルが時間の経過に伴って変化した量を**変位**といいます。ここで、「ベクトルの差」を成分で考えると、それは「ベクトルの成分の差」であったことを思い出しましょう。すると、微分はもともと引き算を使って定義されますから、「位置ベクトルを時間で微分する」とは、位置ベクトルの各成分を時間 t の関数と考えて、その各成分を時間で微分すればいいことがわかります。

図 15 からわかるように、この二つのベクトルの差は、どこに原点をとっても同じように決まります。そして、そのベクトルは、物体の運動の方向に近い方向を向いているはずです。微分について解説したときのように、Δt をゼロに近づけてみましょう。すると、ここで考えている差で表現できたベクトルは、ある瞬間の移動の方向に一致するはずです。この時、Δt を十分に小さくすると変位 $\vec{p}\,(t+\Delta t)-\vec{p}(t)$ の大きさも小さくなります。しかし、微分について学んだことから、これを Δt で割れば、一定の大きさに近づくと予想されます。つまり、$\vec{p}$ を t で微分することが

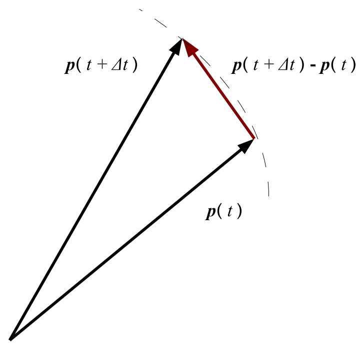

図 15: 位置ベクトルの時間変化 (変位)

できると予想されます。このようにして定義することができるベクトルを**速度ベクトル**あるいは単に**速度**といい、velocity の頭文字をとって v で表すことが多いです。

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt}\vec{p}(t)\end{aligned}$$

$\vec{p}(t)$ が 3 次元のベクトルで、各成分を $p_x(t), p_y(t), p_z(t)$ と表すとします。ここで、余談になりますが、表記の仕方の注意をしておきたいと思います。p の右下に書いた $_x$, $_y$ などの小さな字は「**添字**」と呼ばれています。p と組み合わせて p_x や p_y としますが、これらはひとつの文字として扱われます。アルファベットの数が多くない上に、いろいろな記号を用いるとわかりにくくなるので、ひとつの文字に添字を付けて意味を持たせ、それぞれの変数を区別するのです。物理学や数学ではこうした書き方をよく用います。今後も現れてくるので気を付けてください。

さて、この場合、同様に添字を用いて速度ベクトルの各成分を $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ と表したとします。するとこれらは次のように書けます。ここで、もう一度、ベクトルの引き算は各成分の引き算となっていることを思い出しましょう。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(\begin{pmatrix} p_x(t+\Delta t) \\ p_y(t+\Delta t) \\ p_z(t+\Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dp_x(t)}{dt} \\ \frac{dp_y(t)}{dt} \\ \frac{dp_z(t)}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

物理学では速度と**速さ**を区別します。速度が向きと大きさを持っているのに対して、速度の大きさを速さといいます。

一般には、ここまでで考えた速度も時間変化をすることがあるでしょう。そこで、速度の時間についての微分を考えます。そうして微分して得られたものは、速度の変化、すなわち加速や減速を表す度合なので、**加速度**といいます。加速度もベクトル量です。加速度は acceleration の頭文字をとって a とか、ギリシア文字の α を用いて表すことが多いです。

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t)\end{aligned}$$

同様に成分で表すと次のようになります。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{dv_z(t)}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、速度は座標の時間微分であったことを思い出しましょう。すると、加速度は、座標を 2 回 (数学では、恐らく「2 段階」という意味で **2 階**と書きます) 微分したものです。

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{x}(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_x(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_y(t) \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}p_z(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$ と何度も書くのは面倒です。そこで、$\frac{d^2}{dt^2}$ のような書き方もします。これを用いれば、

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}p_x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_y(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}p_z(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と、すっきり書けます。

このように微分によって加速度を定義できました。もちろん、一般には、加速度も時間変化しますので、加速度の時間変化を考えることもできますし、更に、加

速度の時間変化の時間変化を考えることもできます。しかし、これらについては特に名称もありませんし、これらを扱うこともありません。その理由は、物体の運動について考えるときには、加速度がとても重要であることがわかっているからです。これについては後ほど改めて扱います。

4.5　運動の法則

さて、ここまでで運動の様子を表現することができるようになりましたし、運動についての基本的な物理量である座標と速度と加速度についても学習しました。それでは、こうした物理量は、何によってコントロールされているのでしょうか。

昔から、人々は、物体の運動と力とが関係あると考えてきました。ただし、多くの場合、速度と力に直接的な関係があると考えられていたようです。18 世紀頃になると、あいまいだった運動と力の関係をしっかり考えるようになりました。まず、ガリレオは、力が作用しなければ物体はそのままずっと進行しつづけると考えました[9]。この世の中には力が全く作用しないことはありえませんので、これは実際に実験して確かめた訳では無く、頭の中で考えたことです。(このように、頭の中で行う仮想的な実験を「**思考実験**」と言います。) このように、物体には一度動き出すと、力が加わらない限りそのまま一定の速度を保って動く性質があると考えられます。この性質を**慣性**といいます。また、力を加えられていない物体が一定の速度で移動すること (等速直線運動すること) を**慣性の法則**といいます。

次に、時間的に変化する物体の運動について定量的に示したのはニュートンです。ニュートンは、物体の速度の変化 (加速度) と力とが関係あることに気づきました。

では、そのニュートンが発見した関係について詳しくみてみましょう。以下では、統一的に考えるために、速度の変化量に着目します。そして、三つの観点にわけて話を進めます。

まず、速度の変化 (Δv) は、先にも述べたように力 (F) に比例します。

$$\Delta v \quad \propto \quad F$$

ここで、“$\propto$” という記号はその両側の量が比例することを表しています。この関係によれば、力が加われば、その大きさに応じて物体の速さは速くなっていく、ということになります。二つ目は、物体の速度の変化は、力を加えつづけた時間 Δt に比例します。長い時間力を加えつづければ物体の速度は大きく変わりますし、逆に、短い時間であればそれは少ないです。

$$\Delta v \quad \propto \quad \Delta t$$

三番目に、“重さ” について考えましょう。最初に静止していた物体を動かすことを考えます。静止していたものに速度を与えるのですから、加速することを考える

[9]正確には、少し話が違います。万有引力を知らなかったガリレオは、水平面上を運動する物体は、力が作用しなければ地球を一周するだろうと考えました。

訳です。同じ力を加えても、“重い” 物は動かしにくく、“軽い” 物は動かしやすいです。物体の “重さ” にあたるものを**質量**といいます。そこで、質量 m に対して、加速度は、反比例の関係にあります。

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{1}{m}$$

ニュートンの力学の基礎はこれらの 3 点にあります。これら 3 点について、みなさんは実感が湧くでしょうか。あるいは、何らかの違和感があり、「ちょっとそうかな？」と思うでしょうか。おそらくは、素直に当たり前のことと認めてもらえると思います。

これらをまとめると、

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{F\Delta t}{m}$$

あるいは、両辺を $\frac{m}{\Delta t}$ 倍して

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \propto \quad F$$

となります。ここで、力 F が、時々刻々変化する場合を考えると、ある瞬間についてこのような式が成り立つことを考えるべきです。そこで、Δ がついた量については、Δt がゼロに近づいた極限である微分で考えるべきだということになります。

$$m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt} \quad \propto \quad F$$

ここで、ひとつ注意しておきたいことがあります。それは、力の向きと加速度の向きです。これらは一致します。つまり、力が加わった方向に加速度があります。つまり、ベクトルで表現すべきです。

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; m\vec{a} \;=\; \vec{F}$$

力の向きと速度の向きとは、必ずしも一致しないことに注意しましょう。例えば、みなさんが走っているときに横から軽くドンと押された場合を考えましょう。みなさんは、少し走り方が横にぶれるかもしれません。これは、押された方向に加速度があるということです。しかし、速度は依然としてほとんどまっすぐであって、押された向きとは異なります。

最後に力の性質について重要な点を付け加えます。力は、孤独ではなく、必ず相方がいることわかっています。物体 A が物体 B に力を及ぼすとき、逆に、物体 B が物体 A に力を及ぼしています。それだけでなく、その二つの力は大きさが同じで向きが逆です。例えば、重いボールを持っているひとが、そのボールを投げることを考えましょう。ボールは人からの力を受けて運動を始めます。つまり、加速度を得ます。しかし、ボールを投げると、その人はわずかですが後ろに反り返ります。それは、ボールがその人を押し返しているからです。また、先ほどの、走って

いる人を横から別の人が押す例では、体重にもよるものの、押した人は押した反動で少し後ろに下がるはずです。これは走っている人に力を及ぼしたのに、走っている人は、意識しないでも押した人に同じ大きさの力を与えているからです。ひとつの力 (これを**作用**といいます) に対して、対 (ペア) になって現れ力を**反作用**といいます。また、このように二つの力がついになって現れることを**作用反作用の法則**といいます。

ここまでの話をまとめましょう。慣性の法則を含めてニュートンの運動の法則は次のように書き表されます。

- 第一法則 (慣性の法則)

  > 物体に力が作用していなければ、その物体は静止し続けるか、あるいは、等速直線運動を続ける。

- 第二法則 (**運動方程式**)

  > 物体に力が作用するとき、その物体の加速度の大きさは加えた力の大きさに比例し、質量に反比例する。加速度の向きは力の向き一致する。

- 第三法則 (作用反作用の法則)

  > 一つの物体 A が他の物体 B に力を及ぼすとき、B も A に力を及ぼす。これらの力は、(二つの物体を結ぶ直線上に作用し、) 大きさが同じで向きが逆である。

ニュートンの運動の法則は、もっとも基礎的で重要な部分です。是非、十分に理解するようにしてください。

4.6　力の単位

ここで、少し話が脱線します。第二法則に関連して、単位について、説明しておかなければなりません。

単位は物理量同士の計算と密接に関係しています。例えば、

$$5[\mathrm{m}] + 3[\mathrm{kg}]$$

という計算は意味がありません。異なる単位の物理量同士を、足し算 (+)・引き算 (-) することはできません。足し算や引き算を行うときは、同じ単位の物理量でなければなりません。

では、かけ算 (×) や割り算 (÷) はどうでしょうか。例えば、速さや速度は、移動距離をかかった時間で割ることで得られます。例えば、100[m] を 9.68[s] かかっ

たとすると、その速さは次のように計算されます。

$$\frac{100[\mathrm{m}]}{9.68[\mathrm{s}]} = 10.33[\mathrm{m/s}]$$

といった具合です。右辺には、速さの単位である [m/s] を書いています。ここで、気をつけたいのは、この式は、数値だけではなく、単位についても成り立っているということです。逆に、単位についての計算も成り立つように、速さの単位として [m/s] を用いると便利なのです。

このように、かけ算や割り算を行う場合には、数値だけでなく、単位についても同じような計算をします。そして、一つの単位系では、物理量の定義によって、または、物理法則によって関連づけられた式で、単位の計算についても計算が成り立つように単位が決められています。

次の例はとして、加速度を考えてみましょう。加速度は、速度が時間的にどれだけ変化したかを表す量です。例えば、2 秒間にある方向の速度が 2[m/s] から 20[m/s] になったとします。そのときの加速度は、$\frac{20[\mathrm{m/s}]-2[\mathrm{m/s}]}{2[\mathrm{s}]}$ で計算できます。したがって、次の式によって、加速度の単位は $[\mathrm{m/s^2}]$ とすればいいことがわかります。

$$\frac{20[\mathrm{m/s}]-2[\mathrm{m/s}]}{2[\mathrm{s}]} = 9[\mathrm{m/s^2}]$$

今度は力の単位について考えてみます。そのために、もう一度ニュートンの運動の法則の第二法則をここで書いてみましょう。

$$m\frac{dv}{dt} \propto F$$

この式は、単に両者が比例していることを表しているだけです。「比例している」というだけでは、大変使いづらい式になってしまいますので、比例定数をつけて、等式にしてみましょう。

$$m\frac{dv}{dt} = CF \tag{2}$$

ここで、C は何らかの比例定数です。

さて、ある大きさの力を考えたとき、単位を変更することは、数値を変更することになります。例えば、100 万円という金額に対して、これをドルで表すと、1 万ドル (1 ドル=100 円とします) ということになります。この例のように、同じものを単位を変えて表すと、定数倍変更することになります。力についても同様で、力の単位を変えることで、力の数値は定数倍変わります。そこで、うまく単位を決めることによって、先ほどの定数 C を、ちょうど 1 にすることができるはずです。

それでは、ちょうど傾きが 「1」 になるようにするためには、力にどのような単位を用いれば、いいでしょうか。それは、式 (2) の左辺の単位を考えて、

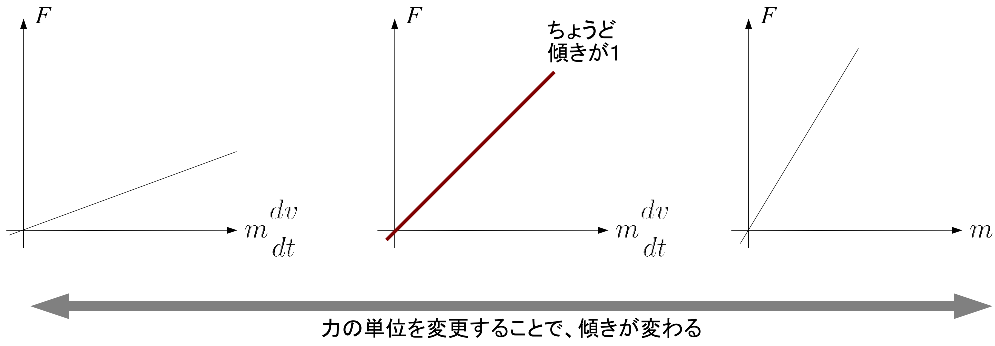

図 16: 力の単位と比例定数

「1[kg] の物体を、加速度 1[m/s^2] で加速させるのに必要な力」

を力の「1」にすればいいことに気づきます。当然、

「2[kg] の物体を、加速度 1[m/s^2] で加速させるのに必要な力」

や

「1[kg] の物体を、加速度 2[m/s^2] で加速させるのに必要な力」

は、「2」の力となります。そうするためには、

$$\left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

を力の単位とすればいいわけです。このようにして力の単位を決めることができます。

この単位は、ややごちゃごちゃしています。そこで、これを一つの記号「**N**」(**ニュートン**) で表します。運動の法則を打ち立てたニュートンにちなんだ名前のつけ方であることは、言うまでもありません。

$$[\mathrm{N}] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

このように単位を決めることで、ニュートンの運動の第二法則は、次のような方程式の形で表すことができるようになります。

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

これを**運動方程式**といいます[10]。

[10] 運動方程式は、ほとんどの場合、微分を含み、かつ、微分された関数を求めるための方程式です。このような方程式は数学的には**微分方程式**といいます。

これからもいくつかの物理量の定義や物理法則が現れます。そして、それに応じて SI にとって自然な単位も現れます。数値だけでなく、単位についても定義や物理法則に沿った計算をすれば単位も計算できるので、今後は気をつけてみていてください。

4.7 加速度と速度と位置

話を戻します。運動方程式は、力がわかれば加速度がわかることを教えています。それでは、加速度がわかると何かメリットがあるのでしょうか。

微分を学んだことをもう一度思い返してみましょう。t の関数 $f(t)$ が与えられ、そのグラフを描くことができたとします。すると、グラフの各点での傾きを求めることにより、$f(t)$ を t で微分したものが得られました。この逆を考えてみましょう。すなわち、各点での傾きが与えられたとき、もとの関数を復元できるか、という問題です。

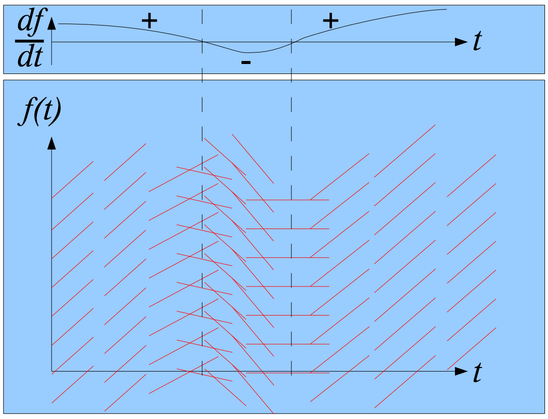

図 17: $f(t)$ の各点での傾きが与えられていること

図 17 では、上の図に、時刻 t に応じた傾きの値を (t の関数として) 示しています。下の図には、それに応じた傾きを色々な点の上で実際の直線の断片で表現しています。これらが与えられれば元のグラフが復元できそうに見えます。しかし、この図から想像できる通り、縦軸に沿った方向にグラフを平衡移動しても、傾きはですから、一つにグラフが決まりません。そこで、例えば、$t = 0$ の時の値を決めれば、一通りにグラフが定まることになります (図 18)。

このように、微分とは逆に、傾き (微分) が与えられた時に元の関数を特定する作業を**積分**するといい、求められた関数を元の関数の積分といいます。上の例でわかったように、積分する際には、ある時刻の値を与えることで初めて一通りに関数が定まります。通常は $t = 0$ での値を与えることが多いので、積分で得られた関数を一通りに定めるための値を「**初期値**」ということが多いです。

これらに基づいて、加速度と速度の関係を考えます。加速度は速度を微分したものです。そこで、加速度が与えられた場合、速度の初期値がわかれば、積分す

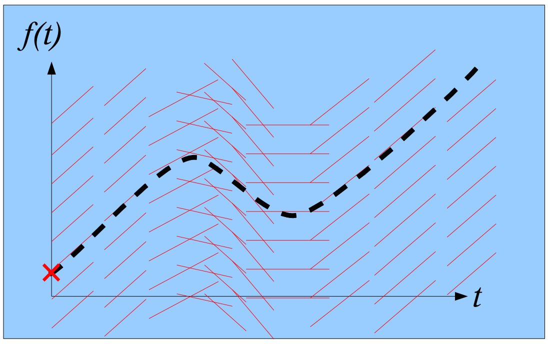

図 18: 傾きから $f(t)$ を決める

ることで速度がわかります。速度が与えられた場合も同様です。位置の座標の初期値を与えられれば、速度を積分することにより、位置がわかります[11]。

このようにして、力と初期値 (速度と位置の初期値) を与えれば、運動方程式によって、未来の位置と速度を決定することができる訳です。運動方程式の発見は、未来を予知する能力を人間が手に入れた、とも言えると思います。

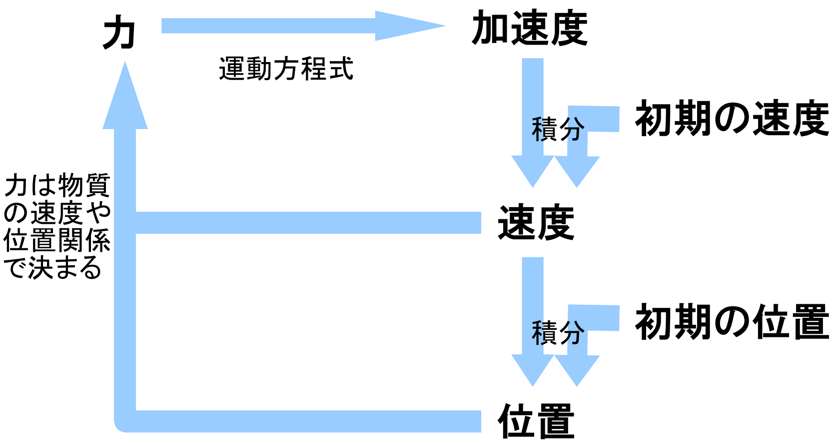

図 19: ラプラス的世界

[11]特に運動方程式のような**微分方程式**を満足する解を求めることを「微分方程式を解く」といいます。

コラム ： ラプラスの魔 (ラプラスの悪魔)

ここで扱ったニュートンの運動の法則は、力学と呼ばれる分野の核心部分です。特に、運動方程式は重要です。運動方程式が意味しているところを考えてみましょう。

まず、ある質量を持った物体に作用する力がわかっているとしましょう。力は、普通、物体間で作用します。具体的に、物体に作用する力は、万有引力や、電気・磁気の力です。これらは、何がどこにあるか、また、どのように運動しているか、で決まってしまいます[a]。ですから、最初に物体に作用する力がわかると考えることは、自然なことです。

さて、力がわかると、運動方程式によって加速度がわかります。加速度は、速度の時間変化率ですから、速度がどう変化するかがわかります。これに初期の速度を考え合わせると、次の時刻の速度を決定できます。同様に速度は位置の時間変化率ですから、初期の位置がわかれば、次の時刻の位置がわかります。このようにして、力と初期の位置と速度が分かれば、次の瞬間の物体の位置と速度が決まってしまいます。

ところが、いろいろな物体の位置関係や速度が決定すると、各物体に作用する力が決まります。力の多くは物体の位置関係で決まるからです。力がわかったので、再び、同様の操作を行うことによって、更に次の瞬間の位置と速度が決まります。これと同様の操作を何度も何度も繰り返せば、次々と先の時刻の物体の位置や速度を決定できます (図 19)。

これは何を意味するでしょうか。

世の中にある物質は、全て、**分子**や**原子**といった細かな粒子でできています。それは、私達の体や脳も含みます。そうした粒子の運動は、上に述べたように、運動方程式によって決まっていて、現在の状態が決まると、未来の状態も決まってしまいます。ということは、未来は決まっているということになります。そして、もしも宇宙の中の全ての粒子の位置と速度を知ることができて、無限の計算能力を持った者 (これを「ラプラスの悪魔」あるいは「ラプラスの魔」と呼んでいます。) がいたとしたら、その者は、全ての未来の出来事を予知していることになります。

この考えは、いろいろな意味で否定されています。それについては今後学習する機会があるかもしれません。しかし、逆に、これを根拠に人間は未来を予測します。例えば、人間は、天気予報をできると信じて、観測データを基にして天気予報を行っています。それは、大気中の粒子が決まった法則に基づいて運動していると知っているからです。原理的には、現在の状態を知れば未来を知ることができることを知ってるからです。また、別の例では、人間は、構造物 (例えば飛行機) を安全に設計します。物体を構成する粒子が予期しない動きをせずに、決まった動きをすることを知っているので、それを前提にして、考えうる状況で安全なものを設計することができる訳です。このような意味で、やはり、人間は将来が予想できるものであるということを知っていると言えます。そして、その能力を活用することによって未来を切り開こうとしていると言えます。

[a]正確には、物体から力を受けるのではなく、「場」から力を受けると考えるべきです。物体だけでなく、電磁波などの波も考える必要があり、そのような意味でこのような表現は誤りです

4.8　等速直線運動

運動方程式を含む、ニュートンの運動の法則は、「力学」の最も中心的な部分です。このテキストの力学の残りの話題は、ニュートンの運動の法則の応用だと言っても言い過ぎではありません。以下では、運動方程式の具体的な応用例をみてみましょう。

まず最初は、等速直線運動です。等速直線運動については既に学びました。しかし、ここでは改めて、運動方程式に関連付けて見直してみましょう。

その前に、この言葉に気をつけてみます。「等速直線運動」とは、一定の速さで直線上を運動することを言います。これは、「等速度」で運動していることを意味しています。速度をベクトルとして考えれば、一定の速さ (速度の大きさ) で、一定の向きを保ちながら進むとは、正しく、速度が一定ということです。そこで、「等速度運動」と表現しても良さそうです。恐らく、「等速度運動」とはあまり言わずに、「等速直線運動」と表現するのは、表現としてはくどくなるのもの、その方が誤解が少ないからだと思います。

さて、速度が一定であるということは、速度の時間変化がない、つまり、速度の時間微分である加速度がゼロであることを意味します。これを運動方程式に当てはめてみましょう。

$$(\text{力}) \;=\; (\text{質量}) \times 0$$

これは、作用する力がゼロの時に等速直線運動をすることがわかります。逆に、力がゼロであるならば、物体は等速直線運動をします。これは、正しく、運動の法則の第一法則に当たります。

4.9　重力による運動

二番目は、**重力**だけが作用する場合の物体の運動についてです。地表面付近では、どんな物体も重力を受けます。では、重力にはどのような性質があるでしょうか。重力には次のような特徴があります。

> 重力：
>
> **作用する向き**
>
> 　　鉛直方向下向き
>
> **大きさ**
>
> 　　(質量) × (重力加速度)
>
> 　　**重力加速度**は、定数と考えます。場所や高度によって若干違うものの、概ね、9.8 [m/s^2] 程度です。

それでは、この重力だけが作用する場合の物体の運動を調べるために、これを運動方程式に当てはめてみましょう。

運動方程式は、

$$\begin{array}{ccc} F & = & m \times a \\ (\text{力}) & = & (\text{質量}) \times (\text{加速度}) \end{array}$$

でした。この力の部分に重力を当てはめます。すると、次のようになります。

$$\begin{array}{ccc} m \times g & = & m \times a \\ (\text{質量}) \times (\text{重力加速度}) & = & (\text{質量}) \times (\text{加速度}) \end{array}$$

あるいは、両辺を質量で割ると、

$$\begin{array}{ccc} g & = & a \\ (\text{重力加速度}) & = & (\text{加速度}) \end{array}$$

となります。この結果は、加速度が時間変化せずに一定であることを意味しています。加速度が一定であるような運動を「**等加速度運動**」と言います。また、この場合は、さらに特徴があります。どんな物体でも、質量が大きかろうが、小さかろうが、同じ一定の加速度 (重力加速度) で運動することを現しています。このように、重力だけで物が落下するような運動を「**自由落下**」といいます。

ここで行った式の変形を言葉で表現してみましょう。すると、次のようになります。

> 「重い」ものは動かしにくく、また、「重い」ものほど重力が大きい、その割合が同じなので、どんな「重さ」のものでも同じ加速度で落下する

ここで、この言葉による説明が、式の両辺から「質量」を消去したことに対応していることを確かめてください。そして、言葉で説明するよりも、数式で消去する方が簡単だと気づいてもらえたらいいと思います。

それでは、具体的に加速度が一定の場合の運動の様子はどうなるでしょうか。それを考えるために、まず、加速度のグラフを考えてみまます。時間により変化しないので、加速度は一定の値をとります。通常、鉛直上向きに座標軸のプラスの向きを合わせます。力は鉛直下向きですから、加速度も負の値になります (図 20)。

次に速度を考えます。加速度が負で一定ですから、速度は傾きが負で一定の直線になります。前にも書きましたが、加速度が与えられていても、速度の初期値が与えられないと速度は決まりません。そこで、**初速** (速度の初期値) が正である場合を考えます。すると、速度の時間変化は次のようになります (図 21)。傾きが負で一定であることに気をつけてください。この場合、初期に速度は正でした。これは、物体が初期には上向きに運動している (投げ上げられた) ことを意味しています。その後、重力によって、負の加速度があるために、速度はどんどん減少し、やがて速度ゼロになります。その時までは上昇して、それ以降は下降する訳です

図 20: 自由落下の場合の加速度のグラフ

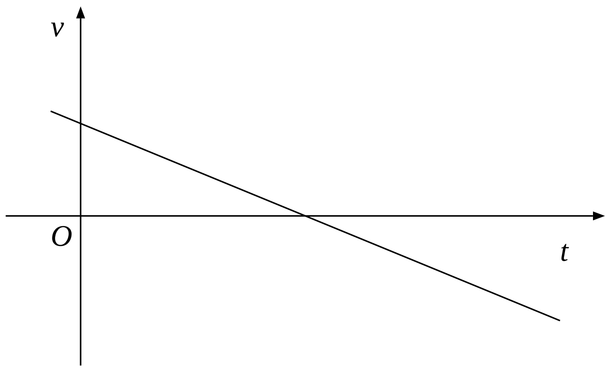

図 21: 自由落下の場合の速度のグラフ

から、この時に最高の高さに達します。下降するときにはどんどん速さが大きくなっていきます。

それでは、位置もグラフにしてみましょう。同様に、位置の初期を与えなければなりませんから、これを適当に与えます。すると、次のようなグラフが得られます。上昇しながら、徐々に上向きの速度が減少し、最高点に達した後、落下しはじめます (図 22)。

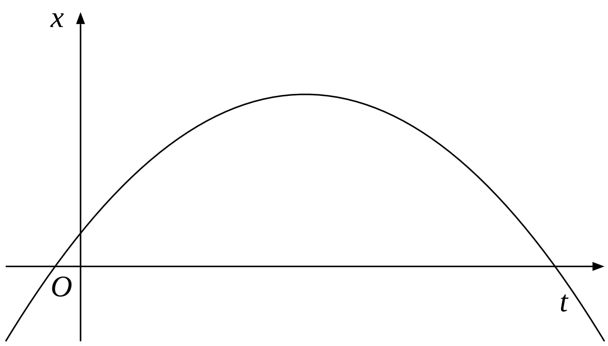

図 22: 自由落下の場合の位置のグラフ

ここでは、運動方程式から

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g$$

という方程式 (これも**微分方程式**の例です) を得て、その解について考えてみました。ここで行ったことは、最も簡単な微分方程式の解を求めたことに対応します。

コラム：ピサの斜塔でのガリレオの実験

もう一度繰り返します。物質の落下の様子は、質量の大小にかかわりません。実際に鳥の羽根が鉄の玉よりも遅く落ちるのは、空気の抵抗があるからです。ガリレオは、ピサの斜塔で鉄球と木の玉を落下させて同時に落ちることを示したと言われています。実は、この時も、実際には木の玉が遅れて落下したと言われています。そしてその原因は空気があるためであると指摘したと言われています。ガリレオは、思考実験で同時に落ちると見破った訳です。

コラム：特撮映画での物の壊れ方

自由落下が示していることは、重かろうが、軽かろうが、大きかろうが小さかろうが、空気の抵抗を無視できれば、同じように落下することです。つまり、落下する距離が長ければ長い程、落下する時間は長くなります。

ウルトラマンなどの特撮映画や特撮番組 (そして**ガンダム**などの SF アニメ) では、巨大な構造物が出てきます。そして、それらはしばしば破壊されます。例えばウルトラセブンが建物に激突して建物が壊れるシーンがあります。この時、スローモーションで映し出されることが多いです。それはなぜでしょうか。

ウルトラセブンには実は人間が入って撮影していますから、実際にウルトラセブンが破壊する建物は、人間程度の大きさしかありません。ところが、ここまでで学んだように、長い距離を落下するのには長い時間がかかります。つまり、人間程度の大きさのものが落下するのにかかる時間は、実際の建物が崩落するのにかかる時間よりずっと短いのです。そこで、ウルトラセブンが壊した建物は、ゆっくり崩壊するように見せる必要があります。そうでないと、いかにもオモチャが壊れているように見えてしまうからです。

特撮映画はそのような工夫をしてきました。一方、このことは、私たちは経験から自然とそのような感覚を身につけているからことを意味し、ある意味、物理法則が感覚として頭の中に染み込んでいることをも意味しています。

コラム：重さと質量

みなさんは体重を計るときにどのようにするでしょうか。普通、体重計にのります。これは、実は、体の「**質量**」(動かしにくさ) を計測しているのではなく、体に作用する「重力の大きさ」を計測しているのです。この重力の大きさを、私たちは通常、「**重さ** (あるいは**重量**)」と言っています。重力の性質として、重力の大きさは質量に比例するので、重力の大きさを計測すれば、体の質量が分かる訳です。このように、「質量」と「重さ」は、私達の日常生活では同じようなものと考えていいと思います。

ところが、重力加速度は場所によって多少異なります。例えば、北海道では値が大きく、沖縄では値が小さいです。そこで、同じ体重の人が沖縄に行くと、体重計の指す値は少なめになるはずです。(実際には、沖縄と北海道と、それぞれ別に調整された体重計を使うことで対処しています。)

更に、国際宇宙ステーションに行った場合を想像してみましょう。国際宇宙ステーションで体重計にのっても、その指す目盛の値はゼロです。つまり、「重さ」はゼロになります。ところが、実際に質量がゼロになった訳ではありません。国際宇宙ステーションでも、宇宙飛行士の健康管理のために、体重を計る必要があります。それでは、どのように計測しているのでしょうか。実際には、宇宙飛行士が体重を計る際には、バネのついた装置につかまり、振動することで体重を計ります。質量が大きいとゆっくり動き、質量が小さいと早く動きます。

4.10 等速円運動

次の応用例は、等速円運動です。等速円運動は、一定の速さでの円周上の運動です。「速さ」が一定であって「速度」が一定ではないことに気をつけましょう。

4.10.1 等速円運動の加速度

この時、加速度はどうなるでしょうか。速さが一定なので加速度はゼロでしょうか？ここで、速度はベクトル量なので、大きさと向きを持つことを思い出しましょう。速度の大きさが一定でも、向きが変われば加速度があることになります。では、等速円運動の加速度はどのようなものでしょうか。例によって、短い時間間隔で運動の様子を再現することで調べてみましょう。

まず、速度について検討します。図 23 の左側を図 15 を思い出しながら見てください。時刻を細かく区切って位置の変化をベクトルで描いてみました。時間間隔を無限に細かくすると、速度ベクトルは円の接線方向であることが予想されます。次に、加速度を考えるために、速度ベクトルの始点を原点に揃えて描き直してみます (図 23 右側)。「等速円運動」ですから、速度ベクトルの大きさ (速さ) は同じです。すると、速度ベクトル自身が、まるで等速円運動の位置ベクトルと同じように、円を描いて変化する様子がわかります。すると、加速度ベクトルは、速度

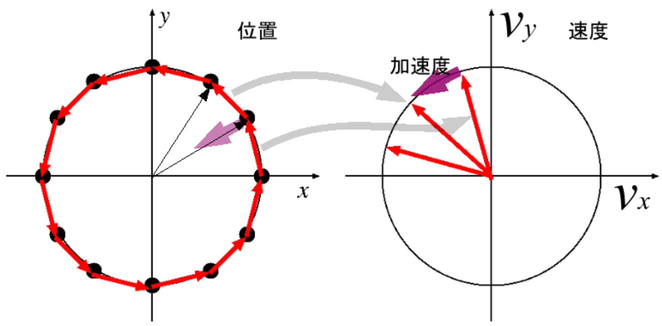

図 23: 等速円運動

ベクトルが描く円の接線に沿った方向になります。これを左側の位置ベクトルの図に戻して考えると、加速度ベクトルは中心向きであることが予想されます。実際、時間間隔をどんどん短くすると、加速度ベクトルはぴったり中心に向くようになります。

これは意外なことのように思うかもしれません。しかし、よく考えてみると当り前であるとも言えます。例えば、ボールにひもをつけてクルクル回すことを考えます。このようにして、ボールがほとんど等速円運動を行うようにさせることができます。この時、ボールに作用している力は何でしょうか。それは、ひもの引っ張る力 (**張力**) です (もちろん重力もありますが)。ひもは、引っ張っている方向にだけしか力を及ぼすことができません。そこで、ひもにつながれたボールが等速円運動をしているとき、ひもは常に中心向きの力を及ぼしています。ということは、加速度も中心向きであるはずです。これは、数学的に計算することでも簡単に示すことができます。しかし、そのためには微分に関するより詳しい知識が必要なので、ここでは省略します。

糸の張力:

作用する向き
糸の互いに引き合う向き。

大きさ F
糸が張っている間は、運動に応じてその大きさが決まる。糸が張っていない間はゼロとなる。

ただし、一つだけ、数学から導かれた重要な結果があります。先ほどの考察から、加速度が中心向きであることがわかりました。しかし、その大きさは分かりませんでした。ところが、数学を使うと、これが分かってしまいます。その大きさは、

$$\frac{(\text{速さ})^2}{(\text{回転半径})}$$

で与えられます。例えば、一定の速さで回す場合には、回転半径が小さい程、加速度が大きくなります。また、速さが 2 倍になると加速度が 4 倍大きくなります。

同じ質量の物体の運動を考える場合には、それに応じて、作用する力も大きくなるはずです[12]。

そして、これを運動方程式に当てはめます。今の場合、加速度は中心向きですから、中心向きを正として運動方程式を立ててみます。すると、等速円運動を行う場合の力の大きさがわかります。

$$6.2(\text{力}) = (\text{質量}) \times \frac{(\text{速さ})^2}{(\text{回転半径})} \tag{3}$$

この力は中心向きです。そこで、この力のことを「向心力」と言います。

等速円運動をする場合には、必ずこれだけの大きさの向心力が必要になります。

4.10.2 万有引力の法則

具体的に興味深い等速円運動のは、惑星の運動です。これはニュートンが扱った問題でもあります。星の運動を考えるときに最も重要なのは万有引力です。万有引力は、全ての物体が互いに互いを引き合っている力です。ニュートンは、運動の法則だけでなく、この万有引力も発見しました。

万有引力:

作用する向き
力の作用する向きは二つの物体を結ぶ線に沿った方向。互いに引き合う向き。

大きさ F

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\begin{aligned} G &: \text{万有引力定数}, 6.67\times10^{-11}\ [\mathrm{m^3/kg{\cdot}s}] \\ M, m &: \text{それぞれ、二つの物体の質量 (単位 [kg])} \\ r &: \text{二つの物体の間の距離 (単位 [m])} \end{aligned}$$

例えば、地球の周りを**人工衛星**が回ることを考えます。万有引力も作用反作用の法則にしたがいますから、地球が人工衛星を引きつけるのとの同じ力で、人工衛星が地球を引きつけています。しかし、人工衛星に比べて地球の方が圧倒的に質量が大きいので、地球は人工衛星の周りを回ることなく、ほとんど動きません。

[12] この結果は数式を用いなくてもある程度理解できます。図 23 を見てください。図中の位置や速度が、一定時間毎に描かれているとします。まず、右の図から、加速度は、この図の半径 (つまり速さ) に比例します。次に、同じく右の図から、加速度は二つの速度ベクトルのなす角度に比例します。この角度は、左に示した位置の図で、各点の位置ベクトルのなす角と同じです。ところが、この角度は、速度を円の半径で割ったものに比例します。そこで、両者を合わせると、$\frac{(\text{速さ})^2}{(\text{回転半径})}$ に比例することになります。

それに対して人工衛星は、常に地球の中心を中心に回転している、と思っていいです。つまり、人工衛星は、地球の中心を中心とする等速円運動を行うとみなせます。そのような場合に、どのようなことが言えるでしょうか。それを調べるために、運動方程式を立ててみましょう。

地球の質量を M, 人工衛星の質量を m として、地球の中心から半径 (軌道半径) r のところを速さ v で等速円運動する人工衛星に関する運動方程式を、中心向きの成分について書いてみます。すると、次のようになります。

$$\begin{array}{ccccc} (\text{中心向きの力}) & = & (\text{人工衛星の質量}) & \times & (\text{中心向きの加速度}) \\ G\dfrac{Mm}{r^2} & = & m & \times & \dfrac{v^2}{r} \end{array}$$

この式から分かることがいくつかあります。

1. 運動が m によらないこと

   両辺 m で割ることができます。

   $$G\frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

   すると、m が消えてしまいました。つまり、m がどのような値でも同じような運動を行うことがわかります。重力中の運動と同じで、人工衛星の運動は質量に関係ありません。重力の時と同じように、「重いものは動きにくいが、その分大きな万有引力を受けている」ために、同じ運動を行います。

2. 速さ (v) と 回転の半径 (r) に関係があること

   ここで、両辺に r をかけてみましょう。

   $$G\frac{M}{r} = v^2$$

   ここで、G, M は定数と考えることができます。そこで、この式は、v と r の関係式であるとみることができます (もちろん、r を v の関数とみることもできます)。両辺の平方根をとると、次のようになります。

   $$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \tag{4}$$

   これは、太陽に近い惑星ほど速く動く性質を表しています。このように、万有引力によって等速円運動を行う場合、中心の星が決まれば、その周りを回る星の軌道半径と速さには一定の関係があります。

コラム ： ケプラーの第三法則

ニュートン以前の時代、ガリレオとほぼ同時代、ケプラーは惑星の観測結果から太陽からの距離と**周期** (もとの位置に戻るまでの時間) との関係に気づきました。具体的には、(半径)^3 ÷ (周期)^2 が一定であるという法則です。そこで、この法則をケプラーの (第三) 法則といいます。

この法則は、式 (4) と対応するとがすぐ分かります。$2\pi\times$(半径) ÷ (周期) は円周の長さを周期の時間で割ったものですから、速さに相当します。そこで、次のように変形できます。

$$
\begin{aligned}
(\text{半径})^3 \div (\text{周期})^2 &= \left(\frac{(\text{半径})^2}{(\text{周期})^2}\right) \times (\text{半径}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{(2\pi \times \text{半径})^2}{(\text{周期})^2}(\text{半径}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}(\text{速さ})^2 \times (\text{半径})
\end{aligned}
$$

そこで、(速さ)^2 × (半径) が一定になります。一方、式 (4) の両辺を 2 乗して、両辺に r をかけてみます。すると次のようになります。

$$
\begin{aligned}
v^2 &= G\frac{M}{r} \\
v^2 \times r &= GM = \text{一定}
\end{aligned}
$$

こうして式 (4) に対応することが分かると思います。

理科年表を元に、ケプラーの第三法則が成り立つか調べてまとめたたものが次の表です。

惑星	(長) 半径 [天文単位]	周期 [年]	(半径)^3 ÷ (周期)^2
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1	1	1
火星	1.5237	1.88089	0.9999
木星	5.2026	11.8622	1.0008
土星	9.5549	29.4578	1.0052
天王星	19.2184	84.0223	1.00545
海王星	30.1104	164.774	1.00548

※ 内側の惑星は 1 よりも値が微妙に小さく、外側の惑星は概ね値が 1 よりも微妙に大きいです。なぜでしょうか。考えてみましょう。

コラム ： 第一宇宙速度・第二宇宙速度

ニュートンは、その著書「**プリンキピア**」に人工衛星の基本的な仕組みを図で示しています。高い山から石を投げると、やがて落下するでしょう。しかし、その投げる速さを大きくすると、次第に落下する地点は遠くに延びていくでしょう。そして、やがて、ある程度の速さに達すると、地球が丸いものだから、地球を一周するようになるでしょう。これが人工衛星の基本的な仕組みです。人工衛星は特にエンジンを噴かしたりすることなく、地球の周囲をぐるぐる回っています。

では、この速度を求めてみましょう。仮りに、地球の表面が、半径 R の完全な球で、大気が無いとします。すると、地表面すれすれで地球の周りを周回する人工衛星について、次の式が得られます。これは、式 (4) のままで、単に表記する文字を変更しただけです。

$$V = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

この速さ V は、これよりも遅いとどこかで地表に落ちてしまう速さです。一方、これよりも速い速さで投げ出せば、より遠くまで地球から離れるような速さです。このような速さを第一宇宙速度と言います。

地球の場合、第一宇宙速度は 約 8 [km/s] となります。地球表面で 約 8 [km/s] で石を水平に投げると (大気が無くて、地球が完全な球ならば)、石は地球を一周して戻ってくるはずです。

この値の $\sqrt{2}$ 倍の値 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ は、第二宇宙速度といわれています。この速度で鉛直上向きに打ち出された物体は、星 (地球) から無限に遠いところまで達することができます。

この第一宇宙速度は、**ブラックホール**とも関連しています。第一宇宙速度が光速に達した物体をブラックホールと名付けています。

コラム：重力と万有引力

この二つの言葉の関係は微妙です。地球科学の場合には、「万有引力」に地球の自転による遠心力を加えたものを「重力」ということが多いです。一方、理論物理の場合には、遠心力を入れることはせず、ニュートンの力学の範囲では「万有引力」といい、アインシュタインによる**相対性論**の範囲のものを「重力」という習慣があるようです。これは困ったことです。このような背景があるために、「**重力波**」という言葉が指し示すものは、地球科学の場合と理論物理の場合で異なります。

言葉の定義をきちんとしなければいけない学問としては、やや情けない話です。でも仕方がないので、学生のみなさんは気を付けてください。

4.11　運動量の保存

今度は、運動方程式を別の観点から調べてみましょう。特に今回は、作用反作用の法則と組み合わせて考えます。

4.11.1　第二法則と第三法則の組合せ

ニュートンの運動の法則の第三法則「作用反作用の法則」を思い出してみましょう。二つの物体 (物体 A と物体 B) があって力を及ぼし合っているとき、その二つの物体に作用する力は、大きさが同じで向きが逆です。次の図で、$\vec{F_{AB}}$ と $\vec{F_{BA}}$ は大きさが同じで向きが逆です。(ここで、$_{AB}$ なども添字ですので気を付けてください。)

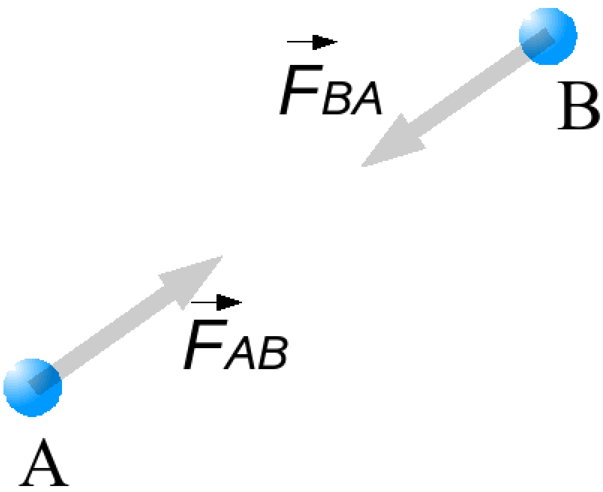

図 24: 作用反作用の法則

ことから、具体的には、どんなことが起こるでしょうか。それを考えるために、まず、**重心**の運動を考えてみましょう。二つの物体の重心 $\vec{x_G}$ は次のように定義されます。

$$\vec{x_G} = \frac{m_A \vec{x_A} + m_B \vec{x_B}}{m_A + m_B}$$

ここで、$\vec{x_A}$, $\vec{x_B}$ は、それぞれ、物体 A, B の位置ベクトルを表し、m_A, m_B は、それぞれ、物体 A, B の質量を表します。これはいわば位置ベクトルの平均です。しかし、単純に足して 2 で割るのではなく、質量に応じた配分を考えているので、このような平均の仕方は**重みつき平均**といいます。一般に、粒子の数が多い場合でも、重心は位置ベクトルの重みつき平均である、ということができます。

話を戻して、物体 A,B の重心の運動について考えてみます。そのためには、重心を表す位置ベクトルを時間で微分します。ここで、足し算で表されているものの微分は、微分したものの足し算になるので、次のようになります。

$$\frac{d}{dt}\vec{x_G} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_A \vec{x_A} + m_B \vec{x_B}}{m_A + m_B}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m_A+m_B}\left(m_A\frac{d}{dt}\vec{x_A}+m_B\frac{d}{dt}\vec{x_B}\right)\\
&= \frac{1}{m_A+m_B}\left(m_A\vec{v_A}+m_B\vec{v_B}\right)
\end{aligned}
$$

ここで得られたものは重心 $\vec{x_G}$ の速度です。これを $\vec{v_G}$ と表しましょう。重心の速度 $\vec{v_G}$ は、ここに書いた定義から、物体 A, B の速度の重みつき平均であることがわかります。

さらに、重心の加速度を求めるために、これをもう一度微分します。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{v_G} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_A\vec{v_A}+m_B\vec{v_B}}{m_A+m_B}\right)\\
&= \frac{1}{m_A+m_B}\left(m_A\frac{d}{dt}\vec{v_A}+m_B\frac{d}{dt}\vec{v_B}\right)\\
&= \frac{1}{m_A+m_B}\left(m_A\vec{a_A}+m_B\vec{a_B}\right)
\end{aligned}
$$

結局、重心の加速度も、同様に、物体 A, B の加速度の重みつき平均であることがわかりました。

ここで、物体 A, B について、運動方程式を考えてみます。今、二つの物体しか存在しないことを仮定します。すると、運動方程式は、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\vec{F_{AB}} &= m_A\vec{a}_A\\
\vec{F_{BA}} &= m_B\vec{a}_B
\end{aligned}
$$

繰り返しますが、$\vec{F_{AB}}$ は、物体 B が物体 A に及ぼす力を表しています。$\vec{F_{BA}}$ は、物体 A が物体 B に及ぼす力を表しています。ここで、作用反作用の法則から $\vec{F_{AB}} = -\vec{F_{BA}}$ です。そこで、これらの辺々を足し合わせて力を消去することを試みます。すると、次のように物体 A, B の加速度について、次の式を得ることができます。

$$
\begin{aligned}
\vec{F_{AB}}+\vec{F_{BA}} &= m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B\\
0 &= m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B
\end{aligned}
$$

さらに両辺を $\frac{1}{m_A+m_B}$ 倍すると、次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m_A+m_B}\times 0 &= \frac{1}{m_A+m_B}\times\left(m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B\right)\\
0 &= \frac{1}{m_A+m_B}\left(m_A\vec{a}_A+m_B\vec{a}_B\right)
\end{aligned}
$$

これは、重心の加速度がゼロであることを意味しています。

ここまでの議論を整理しましょう。二つの物体 A, B の重心の定義から、重心の速度や重心の加速度を求めることができました。ところが、運動方程式と作用反作用の法則から、重心の加速度がゼロであることが導かれました。これは、重心の速度が時間変化せず、一定であることを意味しています。

4.11.2　運動量保存則

物理学では、時間的に変化しない物理量によく着目します。そして、時間変化しないことを「保存する」と表現します。また、保存する物理量を**保存量**といいます。物理学で保存量に注目する理由は明らかです。運動方程式から運動の様子をいちいち計算しなくても、将来をある程度予想したいからです。そのためには、時間的に変化しない量に着目すると便利です。

今回の場合、重心の速度、あるいは、質量と速度の積の合計は、時間が経っても変化しませんでした。質量と速度の積は、特に「**運動量**」といいます。そこで、運動量は保存量であると言えます。また、一般に、二つの物体に、互いに及ぼしあっている力だけが作用しているとき、二つの物体の運動量の合計は一般に保存します。これを「**運動量保存の法則**」あるいは、短く「**運動量保存則**」といいます。

課題

1. ロケット (質量が 1001 トン) を考えましょう。宇宙空間で "静止" していたこのロケットが、動き出すために、燃料を燃焼させて噴射したとします。1 トンの燃料を噴射し、その燃料は平均で 1000m/s で噴き出していったとします。すると、ロケットはどれくらいの速さで進むことになるでしょうか。
2. ロケットが、101 トンで燃料を 1 トン噴射した場合はどうでしょうか。
3. 無重力状態の国際宇宙ステーションで浮遊している宇宙飛行士が、空気中で "水泳" を行うとします。ところが、宇宙飛行士はあまり進めません。なぜでしょう。運動量保存則から考えてみよう。

コラム：ガンダムは加速できるか

この例が示しているように、巨大な構造物を、ガスの噴射によって加速することは、かなり、非効率的です。大量のガスを高速で放出しなければなりません。

これは、スペースシャトルの打ち上げを見てもわかります。スペースシャトルは、本体よりもはるかに大きな燃料タンクを接続しています。そして、燃料を燃焼させることで圧力を上げて、より高速にガスを噴出できるようにしています。

SF アニメである「ガンダム」では、モビルスーツと呼ばれる人間型戦闘機「ガンダム」が活躍します。大きな加速度得るために、噴射口からガスを噴出しています。しかし、画像で見るような加速度を得ることができるか、疑問です。本当にその程度の加速度を得るためには、機体のほとんどが燃料であるか、余程反応性の高い物質を使わなければなりません。それは、どちらも、着弾したときの爆発の危険性も意味しています。

コラム：タケコプターの現実

ドラえもんの道具「タケコプター」は有名です。

これが、頭につけたプロペラが空気を下に押しやることで飛ぶとします。無重力状態で、重力加速度よりも大きく加速することができれば、重力に打ち勝って飛ぶことができます。つまり、体重 30 [kg] の子供が、上に向かって、毎秒 9.8 [m/s] 加速することできれば浮かぶ訳です。

これを実現するには、やはり運動量の保存で考えることができます。空気と子供の間で力のやりとりを行っているので、空気と子供を合計すれば、運動量は保存します。そこで、周りの空気 30 [kg] を毎秒 9.8 [m/s] 加速することができれば浮く訳です。ところが、空気 30 [kg] は、おおよそ 30 [m^3] もあり、これだけの体積の空気を、頭につけたプロペラで動かすのは、難しいように思います。そこで、体積を 1/10 の 3 [m^3] にしてみましょう。すると、1 秒間につき 3[m^3] の空気を 100 [m/s] で下向きに加速する必要があります。どんな台風で実現するよりも速い風です。

いずれにしても、大変なことが起こることは間違いありません。

しかし、ヘリコプターはこれを実現している訳です。大きなプロペラと高速回転でこれを実現しています。

4.12　エネルギー

4.12.1　エネルギーの種類

運動方程式から、**力学的エネルギー**保存の法則を導くことができます。導出はここでは省略します。それはやや数学的だからです。しかし、運動方程式の応用として、力学的エネルギーの保存が導けることは、運動方程式の応用範囲が広いことを示す一例なので、記憶にとどめておきましょう。

さて、その前に、エネルギーとは何か、考えてみましょう。エネルギーの定義は難しいです。しかし、ここでは仮りに、最終的に熱になるものをエネルギーと呼ぶことにします。エネルギーの種類にもいろいろあります。

運動エネルギー

運動に伴ってエネルギーがあると考えられます。例えば、手をこすると熱が発生します。これは、手の運動に伴うエネルギーが熱になったと考えられます。このような運動に伴うエネルギーを運動エネルギーといいます。運動エネルギーは、次のように書き表されます。

$$\frac{1}{2} \times (\text{質量}) \times (\text{速さ})^2$$

ここで、先頭の $\frac{1}{2}$ の部分について捕捉しておきます。これは数学上の便宜的なものであり、実質的な意味はありません。

位置エネルギー

物体の存在する場所に応じてきまるエネルギーのことを位置エネルギーといいます。

例えば、物体が高い場所にあると、それが落下することで速さが増し、運動エネルギーになって、最終的に熱になり得ます。この場合は、高くすればする程、位置エネルギーが大きくなります。重力が作用している場所での位置のエネルギーは、次のように表されます。

$$(\text{質量}) \times (\text{重力加速度}) \times (\text{高さ})$$

音・光のエネルギー

音や光といった波動ももエネルギーです。

熱エネルギー

熱自身もエネルギーと考えらます。

以上が代表的なエネルギーです。このうち、位置エネルギーと運動エネルギーを足しあわせたものを**力学的エネルギー**といいます。

ここで、エネルギーの単位について考えておきましょう。運動エネルギーの定義を考えると、エネルギーの単位は

$$\begin{aligned}[\mathrm{kg} \times (\mathrm{m/s})^2] &= [\mathrm{kgm/s^2} \times \mathrm{m}] \\ &= [\mathrm{Nm}]\end{aligned}$$

です。この単位は [J](**ジュール**) で表されています。

$$[\mathrm{J}] = [\mathrm{Nm}] = [\mathrm{kg}(\mathrm{m/s})^2]$$

位置エネルギーの場合にも同様に単位を計算して、同じになることを確かめてみましょう。

4.12.2 エネルギーの変換

エネルギーは互いに変換することができます。例えば、重力による位置のエネルギーは運動ネエルギーへ変換することができます。重力加速度 g が一定で、高さ h のところに質量 m の物体があるとします。その物体を**自由落下**させると、高さ h の値は刻一刻減少するのに対して、速度 v は増して、それに応じて運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は増大することになります。

このとき、物体に作用する重力 mg が物体を下の方に引っ張り続けています。時間が経過して高さが Δh だけ減少したとしましょう。すると、位置エネルギーは $mg \times \Delta h$ だけ減少します。エネルギーの合計は保存しますから、その分、運動エネルギーが増加したはずです。

一般に、物体に力 F が作用して、作用する力に沿って Δx だけ移動したとき、力 F は、物体に**仕事** $F\Delta x$ をした、といいます。上の例では、重力が $mg\Delta h$ だけ仕事をしたことに対応します。

逆に、ある人が物体を低い位置から Δh だけ持ち上げたとします。重力 mg と (ほぼ) 同じ大きさの力を使って持ち上げたとすると[13]、その人は物体に $mg\Delta h$ の仕事をしたことになります。

4.12.3 エネルギー保存の法則

宇宙中のエネルギーを足し合わせると、その値は変わらないと考えられています。これを**エネルギー保存の法則**あるいは**エネルギー保存則**といいます[14]。

古くは、うまく工夫することのよって、無限のエネルギーを取り出せる機械ができるのではないかと考えた人々がいました。そのような機械は「**永久機関**[15]」と呼ばれています。いろいろな人の努力の結果、このような永久機関は無さそうだ

[13]厳密には同じ大きさの力では動きません。しかし、無限に小さい力を足せば上に移動します。
[14]エネルギー保存則にはいくつかの種類があると考えられます。ここで述べたのはそのうちの一つです。
[15]第一種の永久機関

とわかっています。そこで、これを原理[16]として受け入れて、エネルギーは根本的に保存するものだ、と考えられるようになったのです。

力学的エネルギーについても保存則が成り立ちます。空気の摩擦や抵抗などがない (熱に変わらない) 場合、力学的エネルギーの範囲内で保存することを、運動方程式から導くことができます。

4.13 慣性力

今度は、運動方程式の応用というよりも、運動方程式がどういうときに成り立つかを考えます。

例えば、電車が発車するときのことを考えましょう。電車に乗っている人は、進行方向と反対方向に力を受けたように感じます。(一方、停車するときは、人は進行方向に力を受けているように感じます。)

これを電車に乗っていない人から観察してみましょう。発車するときには、電車に乗って立っている人は静止していたのだから、止まりつづけようとするのは当り前に見えます。もしも床がツルツルだったら、電車内で立っている人はほぼ静止したままで、後ろの連結部分のドアに衝突してしまうでしょう。これを電車と共に移動する人から見ると、立っている人は後方に加速度運動しているように見えます。

これまで考えてきたような普通の状況では、慣性の法則がなりたち、物体は静止しているか、等速直線運動します。このようなことが起こるような座標系を「**慣性系**」といいます。ところが、電車の場合のように、加速度運動しているような観測者から見ると、状況は違って見えます。そのような観測者は、加速度とは逆向きで、その加速度に質量を掛けたような力が作用しているように感じられます。これは、加速度運動している座標系 (**非慣性系**) から観察することによって現れる「**見かけの力**」であって、本当の力ではありません。このような見かけの力を、一般に慣性力と言います。

このような慣性力は電車の例の他にもあります。

1. エレベータの中

   エレベータの中でもこのような力を体験します。止まっていたエレベータが上昇を開始する場合を考えましょう。すると、このエレベータの加速度は鉛直上向きです。すると、エレベータに乗っている人は、鉛直下向きの慣性力を受けているように感じます。つまり、体重が重くなったように感じる訳です。

   次に上昇していたエレベータが止まるときを考えましょう。すると、上向きの速度が減っている訳ですから、下向きの加速度をもって運動している訳です。そこで、中にいる人は、上向きの慣性力が作用しているように感じます。つまり、体重が軽くなったように感じます。

[16]他の事柄から説明できないもの。また、これを基本にして論理を展開するもの。

2. 回転している場合 – **遠心力**

   速さ一定で回転している場合を考えましょう。速さは一定でも、この運動には加速度があることを勉強しました。その加速度は、中心向きでした。そこで、回転している観測者は、外向きの慣性力が作用しているように感じます。これを遠心力といいます。

3. 回転している場合 – **転向力** (**コリオリの力**)

   回転している場合には、もう一つ別の慣性力が作用します。ここで、思考実験として、まっすぐ進むボールを、回転台にのって観察することを考えてみましょう。すると、もちろん、ボールには遠心力も作用します。しかし、それとは別の力が作用し、ボールの軌道が曲がるように感じられます。このような力をコリオリの力 (Coriolis' Force, 日本人に挑戦しているかのような名前です。) といいます。運動してる物体に対して速度に垂直に力が作用するので、「向きを転換させる」という意味で、転向力ともいいます。

   コリオリの力は、地球上では気象にとって重要ですので、その作用する向きだけでも覚えておくと便利です。例えば、北半球 (回転軸上から見下ろして、左回りになっている場合) では、進行方向に対して右手に曲がるように作用します。

コラム：ガンダムのパイロットは気絶しないのか

「特撮映画での物の壊れ方」で述べたように、同じ加速度運動であるならば、長い距離を動くためには長い時間がかかります。そこで、自分の体長と同じ長さを自由落下する場合、大きな構造物程、長い時間がかかることになります。

ガンダムの場合、人間の身長の 20 倍程度の大きさがあります。そこで、人間が動く感覚でロボットが動いたとすると、ロボットの各部分は、相当大きな加速度 (20 倍程度の加速度) で動かさなければなりません。

そのような加速度で動くロボットに搭乗するパイロットは、何か工夫をしない限りは、慣性力を受けて、操縦席で宙に浮いたり、壁に激突したりしている可能性が高いです。

4.14　角運動量とその保存則

最後の運動方程式の応用例は、**角運動量保存の法則**です。

角運動量 (の大きさ) は次のように定義されます[17]。

$$(\text{質量}) \times (\text{中心からの距離}) \times (\text{速度の回転方向成分})$$

ここで、「回転の速さ」は、回転中心から質点への位置ベクトルに対して垂直な成分です (図 25)。

[17] 角運動量は正確には大きさと向きを持ったベクトル量です。これを定義するには「外積」の考え方が必要です。これはやや難しいので、ここでは省きます。

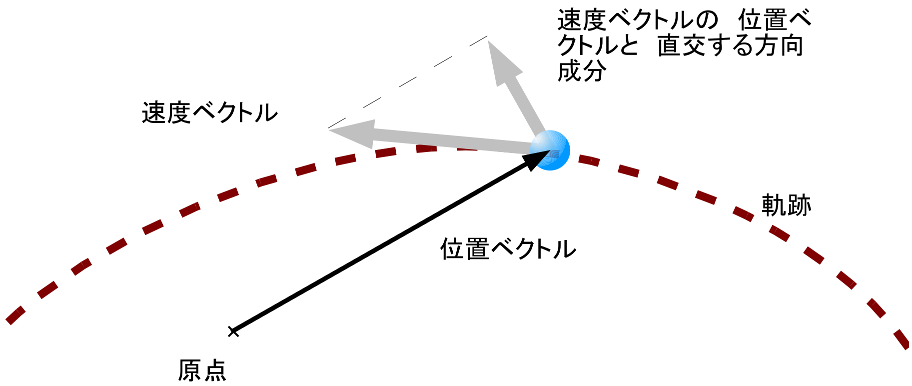

図 25: 角運動量の定義

この角運動量も保存量として知られています。しかし、これが保存するためには条件があります。作用反作用の法則では、二つの物体が力を及ぼし合うとき、二つの力の大きさが同じで向きが逆であるとしました。それには、いろいろな状況がありえます。次の図を見てください (図 26)。どちらも、作用反作用の法則を満たしています。ところが、運動方程式を考えると、力と加速度は同じ向きですか

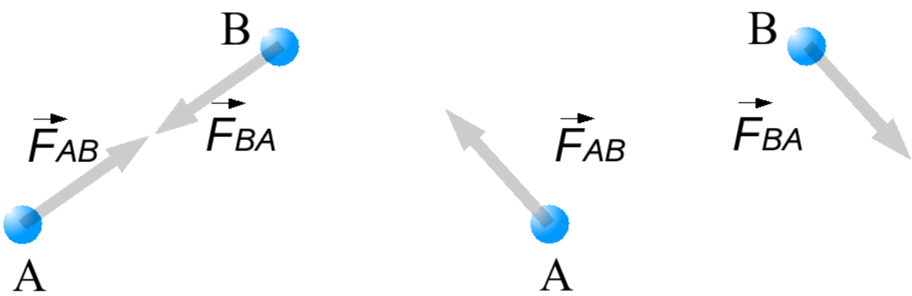

図 26: 角運動量の保存する場合 (左) と保存しない場合 (右)

ら、右の図では、いかにも回転が始まると予想されます。一方左側の図では、新たに回転が生まれるようには見えません。このように、互いに引き合ったり、互いに反発するような場合に限って、角運動量は保存します。言葉を変えると、力が二つの物体を結ぶ線に沿っている場合 (このような場合に作用している力を「**中心力**」といいます) に限って角運動量は保存します。ほとんどの場合、作用する力は中心力です。そこで、角運動量は保存します。ところが、いくつかの例では中心力ではありません。そのような場合には注意が必要です。

では、実際に角運動量が保存するような場合の例を考えてみましょう。例えば、回転台の上に乗ってアレイを持った腕を伸ばしたり縮めたりしてみます。すると、回転の速さが変わることが観察されます (図 27)。

このような場合、外部から回転させるような力は作用していません。それなの

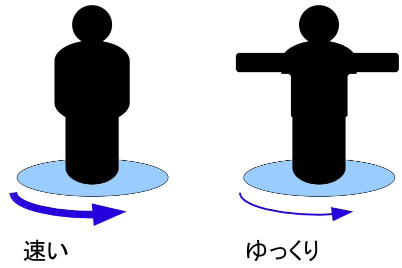

図 27: 角運動量の保存の例:回転台

に、回転の速さを変えることができるのは、角運動量が保存することで説明できます。角運動量 は、(質量) × (中心からの距離) × (回転の速さ) で表されます。左側は、腕の部分の回転の半径が小さいため、回転の速さが大きくなります。そうして、体の全ての部分の角運動量の合計が一定になるようになっています。一方、右側は、腕の部分の回転の半径が大きいため、回転の速さが小さくなります。フィギュアスケートの選手も、回転の速さを変化させます。その時、注意深く見ると、腕や脚を動かして、回転中心からの距離を変えているのがわかるはずです。

回転台で回転の速さが変化する例は、前に出てきたコリオリの力で説明することもできます。上から見て反時計回りに回転する回転台に人が乗っているとしましょう (ちょうど、地球の北半球にあたります)。その人がアレイを持った手を中心方向に引きよせるとき、このアレイにはコリオリの力が作用します。それは、回転を加速する向きです。こうして、回転台の回転の速さは加速します。逆に、腕を広げるときは減速する向きにコリオリの力が作用します (図 28)。

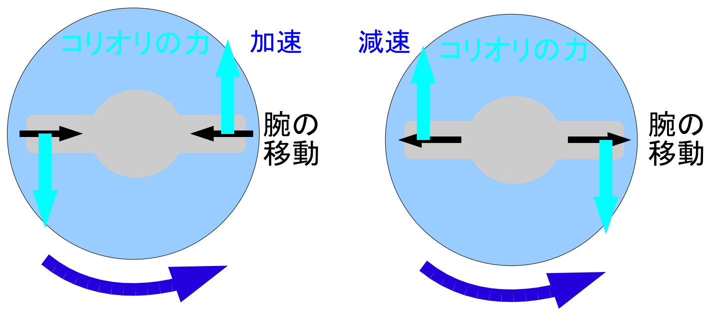

図 28: 回転台の速さの変化のコリオリの力による説明

では、逆に回るときには、腕を広げると加速するでしょうか。そうはなりません。実は、逆回りの時にはコリオリの力の作用する向きが逆になります。結局、どちらの場合でも、腕を広げる減速し、腕を縮めると加速するようになる訳です。

コラム ： 物理「ただ乗り」論?!

物理学の立場からすると、数学で勉強して欲しい部分というのはある程度決まっていて、それほど多くありません。一方、数学の立場からすると、物理で求めている数学は数学の一部に過ぎず、そればかりを注視する訳にもいかないという事情があります。

このような背景の下に、よく、数学の立場から、「物理学の教育は、数学の教育を『ただ乗り』している」という声が上がることがあります。数学には数学の体系があるのに、物理学は自分で必要なところだけを数学に要求している、といった意見です。残念ながら、いつの時代でも、同じような状況が続きましたし、これからも続くでしょう。物理学で必要な数学は、本来は、物理学の中で扱うべきです。

これまで、ベクトル、速度、加速度、といった概念を説明するために、数学の説明もしてきました。これらを扱ったのは、運動方程式をしっかり理解するためにどうしても必要だからです。そして、運動方程式を含む、ニュートンの力学法則は、しっかり理解しなければならないこの講義のテーマだからです。しかし、残念ながら、この物理学概論の時間は非常に限られています。そこで、その他の数学まで十分にカバーすることはできません。また、このような事情を踏まえて、この講義の範囲内では、数学的な部分よりも、基本的な物理学の考え方が身につくように心がけています。是非、皆さんもそれを意識しておいてほしいと思います。

ただ、くどいようですが、運動方程式だけは、きちんと理解し、できるだけこれを書けるように心がけてほしいと思っています。そのためには、運動方程式を理解するための例題が必要です。等速円運動は、中心向きの加速度の大きさがわかってしまえば、運動方程式を書く例としてふさわしいです。

もう一つだけつけ加えるとすれば、数式の変形と言葉の説明との対応です。自由落下のところでは、質量を両辺から消去しました。これは、力の大きさも、「動かしにくさ」も、どちらも質量に比例することと対応していました。このような対応関係がわかってくると、数式で変形した方が楽だと感じられるかもしれません。数式アレルギーを少しでも減らせればいいと思います。

5 電磁気学

5.1 力学と電磁気学

これまで、物体の運動と力について学んできました。では、この世の中にはどのような力があるのでしょうか。

ここで、私達が日常体験する力について考えてみましょう。例えば、縮んだバネには伸びようとする力が作用します。バネを構成する１点１点が互いに反発して伸びようとする訳です。また、私達は椅子に座っています。万有引力が作用しているにもかかわらず、椅子に座った人が下に落下しないのは、椅子が支えてくれているからです。椅子は体重によって少しだけ変形し、バネと同じように内部に反発する力が作用して体を支えます。このように物体の変形に伴って生じる力を**弾性力**といいます。

では、**摩擦力**はどうでしょうか。二つの物体が接触しながら移動すると、互いに互いを引き留めるような力が作用します。走りながらエンジンを止めた自動車は、そのようにして、空気の抵抗や車軸の摩擦によって、やがて停止します。

このように世の中には様々な力が作用しています。ところが、意外なことに、人類が知っている力は、実は、本質的にはたったの四つしかありません[18]。それは次の四つです。

1. **万有引力**
2. **電磁気力**
3. **強い相互作用**
4. **弱い相互作用**

これらの力のうち、「強い相互作用」と「弱い相互作用」については、やや不自然な名前の付け方であると思いませんか？実はこの二つの力は、原子の内部、特に**原子核**の中でだけ現れる力です。他の力に対して発見されてからの歴史が短く、そのような意味では、私達の日常生活とは縁遠い力です。すると、逆に言えば、私達が日常意識することができる力は、万有引力と電磁気力だけになります。

一方、逆に、万有引力はとても弱い力です。地球ほどの大きな質量を持った物体が存在する場合に、初めて、皆さんの体重を実感させるような万有引力が作用するのです。

すると、弾性力や摩擦力など、生活で実感する力の実体は、電磁気力であるということになります。

では、電磁気力が具体的にどのように弾性力や空気の抵抗になるのでしょうか。物質は分子や原子で構成されていることは知っていることと思います。原子の構

[18] もし、超能力に関する現象などが実在するとしたら、他にも力はあるのかもしれません

造は正 (プラス) の**電荷**を持った**原子核**と、それを取り巻く負 (マイナス) の電荷を持った**電子**で構成されます。両者は電気の力で結び付いています。ところが、物体を変形すると、その分子や原子の構造に歪みを生じ、電気的なバランスが崩れ、力が生じます。これが弾性力の正体です。また、分子や原子は常に運動 (固体の場合には振動) しています。振動しているもの同士が接触していると、互いに衝突し合います。衝突してつぶれたり、すり抜けたりしないのは、やっぱり、分子や原子が変形して、元に戻ろうとするからです。前面から激しい雨が斜めに降ってくると人の体が押されるように、運動している物体は、衝突によって他方の物体に運動させるような作用をもたらします。この衝突によって別の物体と力のやりとりを行うことが摩擦力の正体です。このように、電磁気力は、特に私達の身の回りに存在する力なのです。

電磁気力と一口に言っても、その作用のしかたにはいろいろなものがあります。以下では、まず、主として電気と磁気に関係がある力について調べてみましょう。

5.2 電荷間に作用する力：クーロンの法則

電磁気力の中で最も初期に発見されたのは電荷間の力 (静電気の力) です。古代ギリシアの時代には既に発見されていました。いくつかの物質の組合せから、正電荷と負電荷があり、異なる電荷同士が引き合い、同じ電荷同士は反発しあうことがわかりました。

これを定量化したものが**クーロンの法則**です。電荷間に作用する力 (これを**クーロン力**ともいいます) について次のように表されることがわかりました。

電気力 (**クーロン力**):

作用する向き

二つの物体を結ぶ線に沿った方向。
電荷が同符号で斥力。異符号で引力。

大きさ F

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &: \text{二つの電荷 1,2 の間の距離 (単位 [m])} \\ q_1, q_2 &: \text{二つの電荷 1,2 の電荷量 (単位 [C])} \\ \varepsilon_0 &: \text{定数 (真空の誘電率) } 8.854 \times 10^{-12} \left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right] \end{aligned}$$

ここでいくつか注意があります。

- 電荷の大きさ

まず、電荷の間の距離 r_{12} が式中にあります。これは、電荷の大きさが無視できることを前提としています。このように大きさを無視した電荷を**点電荷**といいます。

- 電荷の単位

  電荷量には [C](クーロン) という単位を用います。

- **誘電率**

  比例定数である ε_0 は、真空の誘電率と呼ばれています。名前からわかるように、電荷の間が真空でない場合には、別の定数を用いる必要があります。

- **引力**と**斥力** (せきりょく)

  最後に、力の向きについてです。この式では二つの電荷間の力の大きさを表しているので、向きについては、式だけではわかりません。そこで、別途、力の向きを考える必要があります。作用する方向は二つの点電荷を結んだ線に沿っており、同じ符号ならば反発する力 (斥力)、異なる符号ならば引き合う力 (引力) となります。

この表式は、万有引力の表式と大変良く似ています。これには深い意味がありそうです。

5.3　磁荷間に作用する力

また、実は、磁気についても全く同様の式が成り立ちます。磁気を帯びているものを「**磁荷**」といい、その量を「**磁荷量**」といいます。

磁気力:

作用する向き

二つの物体を結ぶ線に沿った方向。
磁荷が同符号で斥力。異符号で引力。

大きさ F

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

r_{12} : 二つの磁荷 1,2 の間の距離 (単位 [m])
m_1, m_2 : 二つの磁荷 1,2 の磁荷量 (N 極が＋, 単位 [Wb])
μ_0 : 定数 (真空の**透磁率**), $4\pi \times 10^{-7}$[N/A^2]

同様の式なので説明は省略します。この式は「磁気の場合のクーロンの法則」とも言われています。磁荷は [Wb](**ウェーバー**) という単位で表します。

真空の透磁率の値は、$4\pi \times 10^{-7}$ と、きれいな数字が現れています。これは、磁場の強さを決め方に関係してます。これについては、別のところで学びます。

この力は、電気についてのクーロンの法則、また、万有引力の法則と大変よく似ています。この点は注意しておく必要があります。

磁気について、もう一つ、注意しなければならないことがあります。磁気については、「**単極子**」が存在しない (発見されていない) ことです。電荷については、プラスの電荷を持った**原子核**や、マイナスの電荷を持った**電子**のように、片方の電荷だけを持った粒子が存在することがわかっています。しかし、N 極だけの磁荷、あるいは S 極だけの磁荷を持った粒子 (これを**単極子**といいます) は発見されていません。

5.4　電荷と磁荷の間に作用する力

それでは、電荷と磁荷の間にはどのような力が作用するでしょうか。これまで、学習してきた万有引力・電荷間の力・磁荷間の力では、全て、物体の位置関係で作用する力が決まっていました。ところが、電荷と磁荷の場合には、位置関係だけではなく、運動が力に関係しています。

まず、静止している電荷と静止している磁荷の間には力は作用しません。次に、磁荷が静止していて、電荷が運動している場合を考えましょう。この場合、磁荷

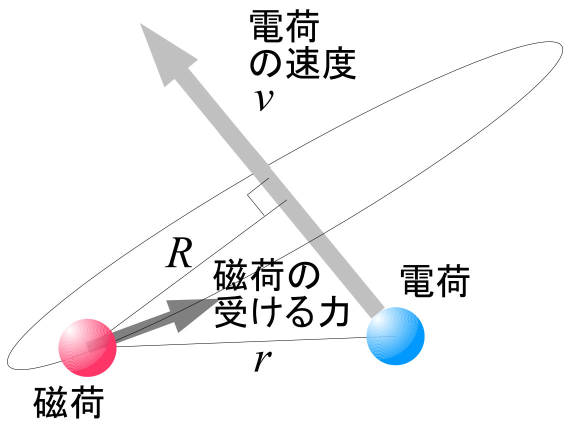

図 29: 運動する電荷が磁荷に及ぼす力

に働く力の向きは、やや複雑です。磁荷の受ける力は、電荷の進行方向に対して直交します。また、磁荷から電荷の速度ベクトルへ降ろした垂線にも直交します。このような場合、向きは二通りあります。正電荷が N 極の単極子の近くを通過する場合、その速度ベクトルを右ネジが進む向きに対応させると、右ネジを回す向きが力の向きになります。言葉で説明するより、図を見てもらった方がわかりやすいと思います (図 29)。

力の大きさも含めて整理すると次のようになります。

ビオ・サバールの法則[a]:

作用する向き

図 29 に示す向き。
磁荷、電荷、速度ベクトルのうちどれかが反転すれば、力の向きも反転する。

大きさ F

$$F = \frac{m}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\cdot\frac{R}{r}$$

q	:	電荷量 (単位 [C])
m	:	磁荷量 (N 極が＋, 単位 [Wb])
v	:	電荷の速度
r	:	磁荷と電荷の距離
R	:	磁荷から速度ベクトルへ降ろした垂線の長さ[a]

[a]正確には、力を磁荷で割った量に対して成り立つ法則です。また、電荷についてではなく、微小な長さの電流についての法則です。

[a]数学で外積を勉強した人は、外積が使えることに気づくと思います。

この力にも、作用反作用の法則に基づいて、反作用があります。つまり、磁荷の周辺で電荷が動くと、電荷は磁荷から力を受けます。

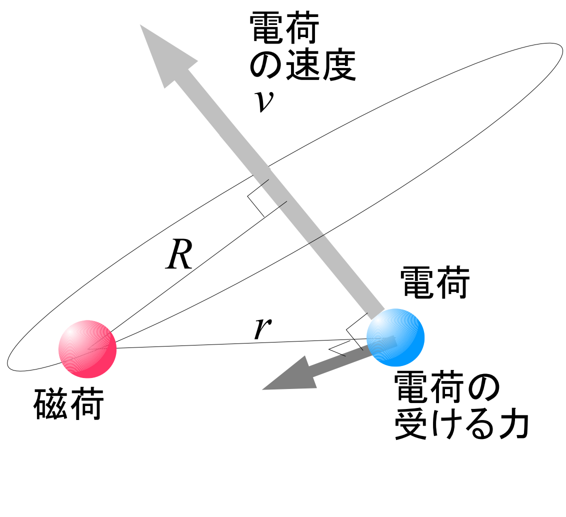

図 30: 磁荷が運動する電荷に及ぼす力

この力についても整理しましょう。

ローレンツ力[a]:

作用する向き

図 30 に示す向き。あるいは、図 29 に示す向きの逆向き。
磁荷、電荷、速度ベクトルのうちどれかが反転すれば、力の向きも反転する。

大きさ F

$$F = \frac{m}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\cdot\frac{R}{r}$$

q	:	電荷量 (単位 [C])
m	:	磁荷量 (N 極が＋, 単位 [Wb])
v	:	電荷の速度
r	:	磁荷と電荷の距離
R	:	磁荷から速度ベクトルへ降ろした垂線の長さ[a]

[a]正確には、電場と磁場がある時に運動している荷電粒子が受ける力をいいます。

[a]数学で外積を勉強した人は、外積が使えることに気づくと思います。

さて、ここで、角運動量保存則 (4.14 章) を思い出して下さい。ビオ・サバールの法則による力とローレンツ力による力とは、作用反作用の法則は満足するものの、力の作用する向きは、電荷と磁荷を結ぶ線上にはありません。そこで、これら

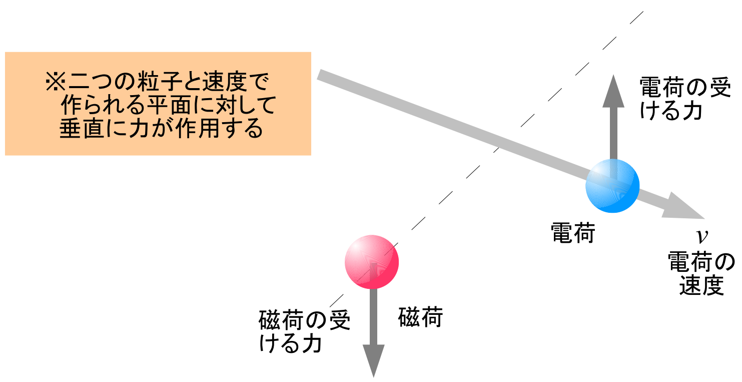

図 31: 磁荷と電荷との間で作用する力

の力は角運動量が保存しないような力の組合せになっています。それでは、角運動量は保存しないのでしょうか。もしも保存しないのであれば、角運動量は、あまり考える意味の無い物理量になってしまいます。

この点は疑問として残しておきたいと思います。

5.5 運動する電荷の間に作用する力

ここまでで、運動する電荷は、磁荷に影響を及ぼすことを学びました。これは、いわば、運動する電荷が磁荷の代わりに「磁力」を作ることを意味します。また、一方で、運動している電荷は、磁荷の周りで力を受けることを学びました。電荷は運動していると、磁荷の影響を受ける訳です。これらを総合すると、運動している電荷同士は、互いに力を及ぼし合うことがわかります。ここでは、二つの例題を挙げます。それぞれ、クーロン力以外にどのような力が作用するか、考えてみてください。

1. 並走する電荷 (図 32)

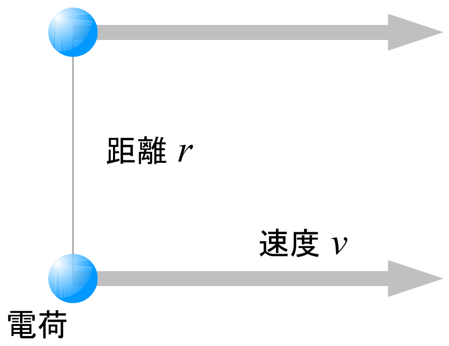

図 32: 並走する電荷

2. 直交する方向から接近する電荷 (図 33)

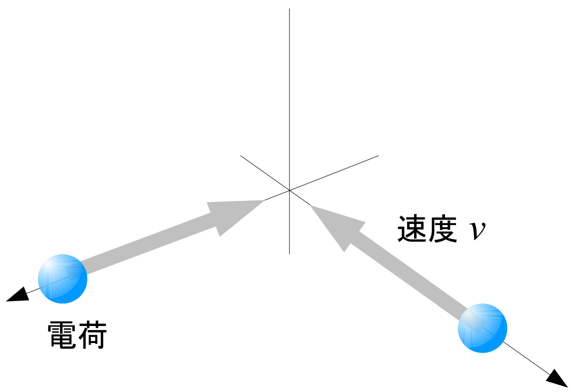

図 33: 直交する方向から接近する電荷

これらの二つの例は、非常に重要な問題を含んでいます。

第一の例については、クーロン力を除けば、互いに引き合う力が発生したことがわったでしょうか。これについては、7.4 章で改めて扱います。そこで、その時に、もう一度考えてみましょう。

第二の例では、驚くべきことに、作用反作用の法則が成り立ちません。そのことに気づいたでしょうか。作用反作用の法則が間違っているのでしょうか？この答えはこの講義の範囲を越えてしまいますので、後で改めて簡単に考えることにします。

5.6 電場と電位

5.6.1 電場とは

さて、電気の力についても磁気の力についても、万有引力についても同様に記述できることがわかったので、これら三つについてまとめて考えてみましょう。とりあえず、この三つの代表として、電気で考えることにします。

ある一つの電荷 (電荷量 q_1) だけが存在したとします。もしも、もう一つの別の電荷 q_2 があったとしたら力が作用することになります。力の大きさは二つ目の電荷の量 q_2 に比例しますから、単位電荷 (1[C]) を置いたときに作用する力の空間分布がわかれば、簡単にいろいろな大きさの電荷に対する力を知ることができます。そこで、空間の中の各点で、そこに 1[C] の電荷を置いたとしたらどんな力が作用するかを考え、そのようにして決まる各点に対応したベクトルを決めます。このように、空間の中で、各点に対応した物理量が決まる場合、その物理量の分布を、一般に、「**場**」といいます。今の場合、各点に対応してベクトルが決まりますから、特に、「**ベクトル場**」といいます。一方、スカラー量が決まる場合には、「**スカラー場**」といいます。また、今の場合、電気力の場なので、「**電場**」といいます。これと同様に「**磁場**」も「**万有引力場** (あるいは**重力場**)」も決めることができます。

これらの場では、二つ目の電荷 (あるいは、磁荷や物質) を置かない限り、何も力が働きません。しかし、もしも、もう一つの別の電荷が存在したのならば力が作用するのですから、最初の一つの電荷が存在することによって、空間の性質が変化したと考えます。このような場は、人間が勝手に想像したものだと思うかもしれません。しかし、**電磁波** (**電波**。光も電磁波に含まれる) が電場と磁場の変化によってできることがわかり、実在するものとして考えられています。

では、具体的に点電荷による電場とはどんなものでしょうか。プラスの点電荷 (電荷量 Q) が原点にある場合を考えましょう。すると、ある場所に別の点電荷 (電荷量が 1[C] であるような電荷:単位電荷) を置くと、原点から遠ざかる向きに、力が作用することになります。その大きさは、原点に近い程大きく、原点から離れると小さくなります。つまり、いろいろな点に原点から遠ざかる向きのベクトルが描ける訳です。それが点電荷の作る電場となります。点電荷の作る電場を図示してみます。

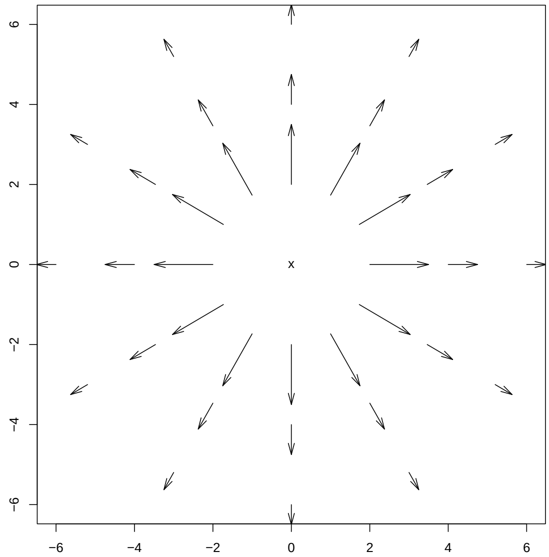

図 34: 点電荷の作る電場 (ベクトル場) の模式図

この電場を次のように式で書いてみます。

$$\vec{E} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)} \times \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\times$ の記号の左側は、クーロンの法則に対応して、各点での電場の強さが、原点からの距離の 2 乗に反比例することを示しいます。$\times$ の記号の右側は、大きさ 1 の単位ベクトルです。向きは、原点と点 (x,y,z) を結んだ直線上の外向きです。

5.6.2　電気力線

電場の表すベクトル場を滑らかにつないだものを**電気力線**といいます。電場の様子を電気力線を用いて表すこともあります。

電気力線の特徴は、次のような点です。

1. 電場は、電気力線の接線方向になっている。
2. 正 (プラス) の電荷から出発して、負 (マイナス) の電荷に達する。
3. 電場の強さ (電荷を置いたときの力の強さ) は、電気力線の混み具合に対応している。

※ ここで気をつけておきたいのは、電気力線が、「そこに荷電粒子を置いたときに、その荷電粒子がたどる経路」では**ない**ということです。電気力線は力の向

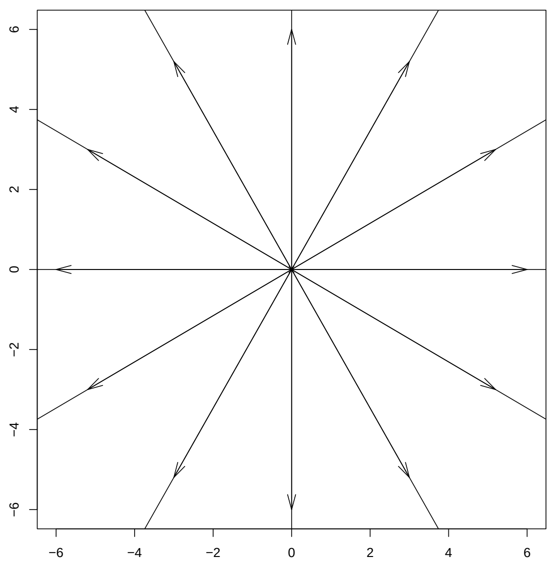

図 35: 点電荷の作る電場の電気力線による表示

きを与えるだけ、つまり、加速度の向きを決めるだけで、速度とは一致しません。点電荷の作る電場の場合、電場は点電荷から遠ざかる向きしかないので、任意の静止していた点電荷は電気力線上をたどることになります。しかし、これは例外的な話です。

5.6.3 等電位面 (線) と電位

電気力線に垂直な面 (2 次元ならば線) を**等電位面** (**等電位線**) といいます。

このような等電位面にはどのような意味があるでしょうか。電荷を、等電位面に沿って動かしてみます。すると、等電位面の定義から、電荷を動かす向きは、常に、電荷に作用する力と直交しています。これは、点電荷は、等電位面に沿って動かしている間は加速されないことを意味しています。あるいは、力を受けていても力に沿った向きの移動量はゼロなので、**仕事**をしない、ということもできます。そのため、この時、運動エネルギーは変化しません。

一方、等電位面を横切って動く場合はどうでしょうか。例えば、電気力線に沿って動かすと、受けている力に沿った方向に電荷を動かすことになります。すると、電荷は加速され、速度が変化します。速度が変化すると、運動エネルギーが変化します。これは、物体が落下する際に、重力による位置のエネルギーが運動エネルギーに変換されることによく似ています。電場による力が電荷に仕事をしたということができます。

そこで、電場による位置のエネルギーを考えることができます。力が電荷に比例するので、位置のエネルギーも電荷に比例します。そこで、単位電荷 (1[C]) 当

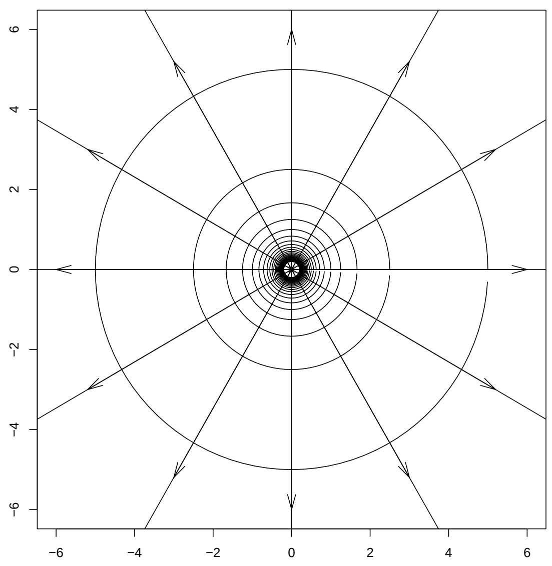

図 36: 点電荷の作る電場の電気力線と等電位面

たりの電場による位置のエネルギーを考えます。この、単位電荷当たりの位置のエネルギーを**電位** (ϕ) といいます。力学的なエネルギーが保存することを前提とすると、ある場所 A から別の場所 B へ荷電粒子が移動したときに、速度 (の 2 乗) の変化量は、A の電位と B の電位の差で決まってしまうことになります。

電位 (ϕ) は、次のような性質を持っています。

1. 電位 ϕ はスカラー場である。空間内の位置によって電位が決まる。
2. 電位 ϕ に電荷 q をかけると、その場所に q の電荷を置いたときの位置エネルギーになる。
3. 電位の単位は、[J/C] である。これを [V] (**ボルト**[19]) で表す。
4. 等電位面では電位は一定である。
5. 等電位面は電気力線に垂直である。

磁力について、同様のものを考えることができ、それを**磁位**といいます。また、万有引力についても同様ものを考えることができます。万有位、とでも言いたいところです。しかし、通常は、**重力ポテンシャル**などと呼んでいます。

5.6.4　位置エネルギーと運動エネルギー

このように定義された電位にはどのような意味があるでしょうか。具体的な計算は後回しにして、結論からお話すると、次のような性質があります。

[19]ボルタ電池の発明者ボルタにちなんでいる

ここで、電場の中のある一つの荷電粒子を考えます。電場以外からの力が作用していないとします。すると、ある場所 A から別の場所 B へ荷電粒子が移動したときに、速度 (の 2 乗) の変化量は、A の電位と B の電位の差で決まってしまうことになります。あるいは、作用する力が電場によるものだけの場合、力学的エネルギー (電位) $\times$ (粒子の電荷) $+ \frac{1}{2} \times$ (粒子の質量) $\times$ (粒子の速度)^2 は、時間が経過して、粒子が移動しても変化しません。

運動方程式を立てて運動を調べることはできます。しかし、一つ一つの問題に対していちいち運動方程式から考えていたのでは大変です。もしも、運動方程式から考えなくても、運動の様子をある程度想像できると便利です。ここで書いた性質は、時間的に変化しない量に着目した性質です。このように時間が経過しても変化しない量を「**運動の積分**」といいます。

運動の積分が沢山あれば、それだけ運動の様子がわかることになります。しかし、残念ながら、それほど沢山ある訳ではありません。

ここに現れた力学的エネルギー

$$(\text{電位}) \times (\text{粒子の電荷}) + \tfrac{1}{2} \times (\text{粒子の質量}) \times (\text{粒子の速度})^2$$

がその一つです。

原子核の周りにある**電子**についても同様の運動が考えられます。日本人の**長岡半太郎**やイギリスで活躍した**ラザフォード**は、原子の構造は、原子核と、原子核の周囲を回る電子で構成されると考えました。しかし、現在ではこの考え方は否定されています。実際にどのようになっているかは、量子力学の誕生後にわかってきました。

5.7 電流

5.7.1 静電気と電流

さて、これまでは電荷の組織だった運動についてはあまり考えず、電荷や磁荷の間に作用する力やエネルギーを考えてきました。ここで、身近な例の電位について見てみましょう。冬にセーターを脱ぐとき、静電気でセーターが洋服に吸いつきます。このような場合の静電気による電位の差 (電位差) は数千から数万 [V] といわれています。家庭用の電気は、日本では 100V (あるいは 200V) です。ですから、静電気の方が、桁違いに電位差が大きい電気です。

しかし、考えてみてください。例えば 100[V] で電熱器を使って体や部屋を暖めることができます。ところが、セーターを脱いだり着たりして部屋が暖まったり体が暖まるとは思えません。それでは、家庭用の電気と静電気とはどこが異なるのでしょうか。

もちろん答えは電荷量です。電位のところでも触れたように、電荷量と電位の積がエネルギーの量を決定します。日常体験する静電気は、電荷が移動しにくい

物に生じます。従って、大量の電荷が流れることはありません。電圧は高くても少量の電荷だけが流れるので、それほどのエネルギーは発生しません。

一方、継続的にエネルギーを発生させるには、電荷が流れやすい物体を使い、継続的に電圧をかけることで実現します。継続的な電荷の流れを**電流**といいます。電流は、1 秒間に流れる電荷の量なので、[C/s] という単位を用います。この単位は、[A](**アンペア**) と名付けられています。

さて、電位差 E [V] のところを電流 I [A] が流れている場合を考えます。t 秒間に $I \times t$ [As] $= I \times t$[C] の電荷が電位差 E [V] を横切るので、$I \times t \times E$ [VC] $= IE \times t$[J] のエネルギーが発生します。そこで、IE[VA] $= IE$[J/s] は 1 秒間当たりに発生するエネルギーであることになります。特に [J/s] という単位は [W](**ワット**) という表記を用います。そして、1 秒間当たりに発生するエネルギーを**仕事率**といいます。

家庭用の電気の場合でも同様の計算をすることができます[20]。日本の家庭用電源の多くは 100 [V] ですので、例えば 1000[W] の電子レンジには 10 [A] の電流が流れています。また、例えば、40[W] の蛍光灯には 0.4 [A] の電流が流れています。

5.7.2 直流回路

上に書いたように継続的に電荷を流すためには、電荷を送り込む場所と引き込む場所が同じである必要があります。そのような装置を**電池**とか**電源**といいます。電源からある経路をたどって再び電源にたどり着くまでの経路全体を**回路**といいます。

電流が流れやすい物を使って継続的に電流を流す場合、二通りの流し方があります。電位の高いところと低いところが時間的に変化しない**直流回路**と、それが時間的に交替する**交流回路**です。この講義の中では直流の場合だけ考えます。

直流回路の代表例は次のようなものです。

このような回路は小学校から慣れ親しんでいると思います。電池は、電荷を流しながら電位を上昇させる装置です。**抵抗**は、名前の通り、電荷を流れにくくするものです。そのほかの線で表された部分は、抵抗が小さく、電気を良く流す物質 (**導体**) です。このような導体は事実上抵抗ゼロとして扱うことが多いです。

さて、このような回路について、これまでの学習を踏まえて考えてみましょう。

導体

まず、導体です。導体は多くの場合、金属が使われます。金属には**自由電子**と呼ばれる**電子**があります。この自由電子は、特定の金属原子に捕われることがありません。いわば、金属中の全ての原子で共有している電子と言って良いでしょう。電子の電荷は負 (マイナス) で、自由電子を除いた金属原子は、正 (プラス) の電荷を帯びています。電子が取り除かれた原子 (あるいは原子

[20] 家庭用の電源は交流であるので、実際にはやや事情が違います

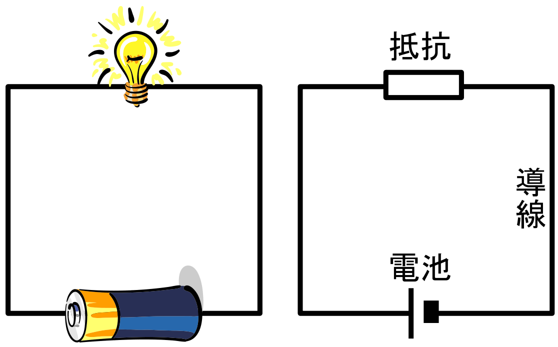

図 37: 直流回路の例 (右側は回路図)

団) を**陽イオン**と呼びます。

余談ですが、原子に余分に電子がついている場合もあります。これもイオンと呼びます。ただし、全体が負に帯電しているので、**陰イオン**と呼びます。

さて、自由電子があるために、抵抗がない導体内には電位差がありません。もしも電位の高いところと低いところがあったとしたら、電位差を打ち消すまで電子が移動するでしょう。この考え方はいろいろな場面で重要になります。

電池

電池は電子のポンプのような働きをします。電池の周りに電位差を生じさせます。電池のマイナス極 (陰極) 側では電子を押し出し、電池のプラス極 (陽極) では、電子を吸い込もうとします。このときの、電子を押し出したり吸い込んだりする能力が電位差 (これを**電圧**といいます) に当たります。

静電気との決定的な違いは、継続して電子を供給できるところです。電池ができて初めてわかった電気の性質が沢山あります。実際、**ボルタ**が実用的な電池 1799 年にを作ってからおよそ 30 年間の間に、多くの電気 (電流) についての法則が得られています。

なお、実際に移動するのは電子なのです。ところが、電子が発見されるより前に電流が定義されたこともあり、電荷の流れである電流は、仮想的なプラスの電荷の流れと決められています。電子の流れる向きとは逆になります。

抵抗

導線の中を電圧によって動く電子を想像してみてください。特に流れを邪魔する物がなかったら、電子は落下する石のように、どんどん加速しながら流れるでしょう。逆にそうならないならば、電子の流れを妨げるような何かがあるのだと考えられます。それが抵抗です。

本来加速されてもいいようなところを、言葉を替えれば、運動エネルギーが増えてもよさそうなところを、運動エネルギーが増えないまま流れるとした

ら、電子は運動エネルギーを失うことになります。

抵抗では、電子から失われたエネルギーが、熱や光のエネルギーとなります。特に抵抗で発生する熱のことを**ジュール熱**といいます。

このような回路については、次の**キルヒホッフの法則**が成り立ちます。これが直流回路についてのポイントになります。

- 直流回路の各部分について、電圧 E と電流 I と抵抗の大きさ R について次のオームの法則が成り立つ。

$$E = R \times I$$

- 直流回路の各部分について、入ってくる電流の量と出ていく電流の量は同じである。

5.7.3 アンペールの法則 –電流と磁場—

この章の冒頭で自然界の４つの力について説明しました。そこで不思議に思った人も多いと思います。というのも、電気と磁気の力を一つにまとめているからです。これまでの説明では電気と磁気は別物でした。しかし、実際には、電気と磁気には密接な関係があります。その関係の一部分について話を進めましょう。

まずは、電気による磁場の生成です。電流は電荷をもった粒子の流れです。この電流の周りには磁場が発生します。その様子は、右手を使って説明するとわかりやすいです。今、電流の向き (正の電荷を持った粒子が進む向き) に親指を対応させます。次の図のように、親指を立てて、他の指で握り拳を作ると、親指以外の指の向きに磁場が発生します。これを**右ネジの法則**という言い方をすることあります。磁場の向きに右ネジを回すと、電流の方向に進んでいくからです。このように電荷が移動すると磁場が発生します。電流の周りの磁場は、**アンペールの法則**によって記述されます。

アンペールの法則は、直線上を流れる電流 I の周りの磁場の強 H さを表したものです。

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

ここで、r は 電流からの距離を表します。電流と磁気の相互作用を考える場合、磁場の強さ H に対して、透磁率 μ_0 をかけた**磁束密度** B を使うことが多いので気をつけてください。

$$B = \mu_0 H$$

導線を次の図のように巻いたものを**コイル**といいます。コイルに電流を流すことを考えましょう。コイルのそれぞれの部分にアンペールの法則を適用すると、コイルの周辺では次の図のような磁場ができます。

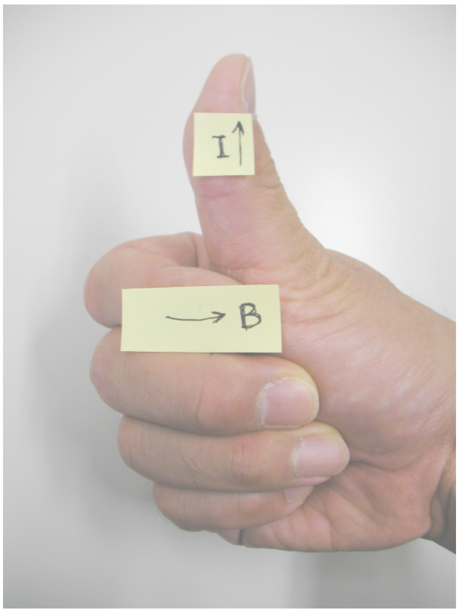

図 38: 電流の周りに発生する磁場の向き

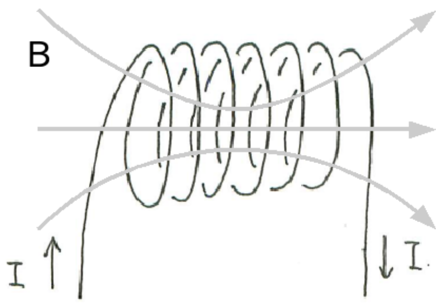

図 39: コイルの周りに発生する磁場

5.7.4　電流の受ける力

次に、磁場の中を流れる電流を考えましょう。すると、この粒子には、すこし想像しづらい力が作用します。これを説明するために、左手を用意し、次のように3本の指を伸ばして下さい。すると、粒子の進行方向を中指、磁場の向きを人差指に対応させると、親指の方に力が作用します。この表し方は、「**フレミングの左手**」と呼ばれています。また、この力は**アンペールの力**磁場に対して垂直な方向に力が作用するのは、とても特徴的です。

ローレンツ力は一つの荷電粒子に対する力でした。一方、ここで考えているのは電流に作用する力です。しかし、電流の正体が導線の中を次々に移動する荷電粒子であることを考えると、電流を流した導線が力を受けるであろうこと、そして、その力の向きは容易にわかります。また、力の大きさについても次のように表されることがわかります。

$$(\text{力の大きさ}) \quad = \quad (\text{磁束密度}) \times (\text{電流})$$

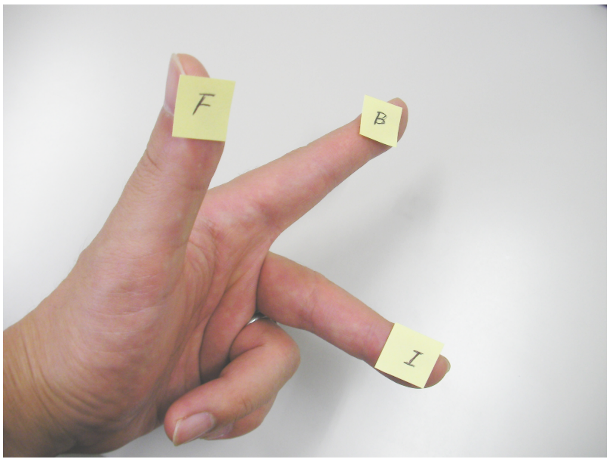

図 40: 磁場 (B) 中を進行する荷電粒子 (I) に作用する力 (F)

$$F \quad = \quad B \quad \times \quad I$$

ここで、電流に作用する力は単位長さ当たりになっていることに気を付けてください。

このような力が作用することと、電流の周りの磁場のでき方を考えると、並行して導線が通っているときに、導線間に作用する力がどんなものかを考えることができますので、みなさんも考えてみてください。

コラム：雷で割れる木

余談になりますが、雷が落ちて、木が割れる現象について、聞いた話を書いてみます。

雷は高くて尖ったものに落ちやすいことが知られています。木はそのような条件を満たしています。木の中で水分が比較的多いのは表面付近です。そこで、木に雷が落ちると、電流のほとんどは木の表面に沿って流れます。

ところが、平行して走る電流は互いに引き合います。そこで、木の幹はぎゅっと締めつけられ、弾性のエネルギーをため込むことになります。雷による放電が停止すると、電流も無くなり、幹を締めつけていた力がなくなります。そのため、幹は弾性によって一気に膨らみ、その勢いで幹が破裂するそうです。

雷で電気が流れたときではなく、流れ終わってから幹が割れるという話を興味深く思った記憶があります。

5.8　電磁誘導

今度は、静止している磁石に対して、次の図のように導線を動かすことを考えましょう。導線の中の電荷 (具体的には電子) は、導線と共に運動しているので、この電子に対してローレンツ力が作用します。すると電子は移動しようとします。電子が流れようとするということは、今考えている導線の部分に電位差が生じていることを意味します。このように、導線と磁石の相対的な運動によって電圧が

生じることを**電磁誘導**といいます。

5.9 磁場の単位

磁場の強さを表す場合、「**磁場の強さ**」と呼ばれるものと、「**磁束密度**」と呼ばれるものの両方が良く現れます。基本的に一様な物質の中では互いに比例するので、どちらかを使えばよさそうなものです。しかし、両方現れれてくる上に、流儀によってどちらを主に使うかが分かれてきます。その上、単位を考えると更に厄介です。ここでは、単位を意識しながら、それぞれの物理量についてまとめてみましょう。

磁場のクーロンの法則

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}$$

- 磁荷 m_1, m_2 の単位：[Wb] = [J/A] = [N・m/A] = [kg・m^2/A・s^2]
- 透磁率の単位：[Wb^2/N・m^2]= [Wb/A・m] = [kg・m / A^2・s^2] = [N/A^2]

クーロンの法則による磁場の強さ

$$H = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r_{12}^2}$$

- 磁場の単位：[N/Wb]

アンペールの法則による磁場の強さ

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

- 磁場の単位：[A/m] = [N/Wb]

磁場と磁束密度の関係

$$B = \mu_0 H$$

ローレンツ力による磁束密度

$$F = qvB$$

- 磁束密度の単位：[N/A・m] = [Wb/A・m][N/Wb]

6 振動と波動

世の中のいろいろなものは、意外にも**波** (あるいは**波動**) で満たされています。まず、世の中の物質を構成する電子や陽子、つまり原子を構成する素粒子は、波の性質を持っていることが知られています。また、光や電波は波です (ただし、これらは粒子の性質も持っています)。音や地震も波ですし、海のうねりや津波も波です。さらに、大気中には、ロスビー波や内部重力波などといった波があります。こうした波にはいろいろなエネルギーを運ぶ性質があり、離れた場所に影響を及ぼします。また、波の性質をうまく使うことで、見えないものが見えてくることがあります。例えば、地球の内部がどうなっているか、について、人間は地面をわずか数 km しか掘ることに成功していません。しかし、それよりも深い場所の様子がわかるのは、波の性質を利用しているからです。そこで、波の役割を知っておくことはとても重要です。

また、波を考えるときには、あらかじめ**振動**について知っておく必要があります。波を観察すると、それぞれの場所では何かが振動しているだけです。ですから、振動の性質は波の性質を考える上でとても大切です。ここで強調したいのは、その「何か」自身が伝わっている訳ではないということです。例えば、地震は、地下の震源で岩盤の破壊によって始まります。しかし、その岩盤が地表まで飛んでくる訳ではありません。大地は基本的には移動せず、各地点で振動し、それが伝わってきているのです。そこで、まず、振動について詳しく見ていくことにしましょう。

6.1 単振動

次の図のような、バネについたおもりの運動を考えてみましょう。

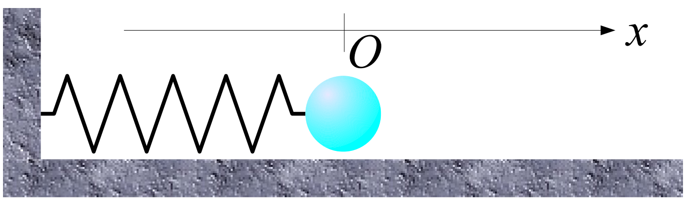

図 41: バネについたおもり

x 軸は、紙面に向かって右側を正にとり、伸び縮みが無い点を原点にとっています。バネの弾性力は、近似的に、伸びや縮みに比例して、元に戻ろうという力 (**復元力**) です。つまり、おもりには、原点から離れるとそのずれた量 (これを**変位**といいます) に比例して原点に向かうような力が作用します。(このように伸び縮みに比例した復元力が作用することを「**フックの法則**」といいます。)

このおもりについての運動方程式を考えてみましょう。

$$-kx = ma$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{dv}{dt} \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}
\end{aligned}
$$

左辺が力で、復元力を表しています。変位 x に比例する力で、x が正の時には負の向き、x が負のには正の向きに作用するように、負の符号 (負号) を使っています。k は比例定数です。右辺は質量 m と x 方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ です。

これで運動方程式が立てられました。この運動方程式を満足するような x を求めることができれば、バネにつながったおもりの運動がわかるはずです。このようなタイプの運動方程式 (**微分方程式**) は、とても基本的なので、答えを覚えておくと便利です。具体的にいうと、x を 2 回微分すると x の定数倍 (ただしこの定数は負の数) になるような微分方程式です。このような場合には、$x = A\sin\omega t$ と置いてみて、後から ω を決定するのが決まったやり方です。なお、このように現される運動を**単振動**といいます。また、三角関数 sin の**引数** (ひきすう:関数に与える変数) である ωt は、経過時間 t に比例していることを現しています。特に ω を**角速度**といいます。

コラム ： 単振動で現れる三角関数の微分

ここでは、実際に計算して確かめてみましょう。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} A\sin\omega t &= \frac{d}{dt}\left(A\frac{d}{dt}\sin\omega t\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos\omega t\right) \\
&= A\omega\frac{d}{dt}\cos\omega t \\
&= -A\omega^2\sin\omega t
\end{aligned}
$$

となります。これを運動方程式に代入します。$x = A\sin\omega t$ ですから、

$$
\begin{aligned}
-k(A\sin\omega t) &= m(-A\omega^2\sin\omega t) \\
-k &= -m\omega^2 \\
\omega &= \sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned}
$$

となり、確かに矛盾はなく、正しい答えを導けたようです。最終的な答えは、次のようになります。

$$
x = A\sin\sqrt{\frac{m}{k}}t
$$

単振動について、以下にまとめます。

1. 振動中心からのずれ (変位) に比例した復元力が作用する場合の運動である。
2. 変位の時間変化は、正弦関数 (sin) を使って、$A\sin\omega t$ というように表される。

コラム ： 微分方程式の未知数

ここで見たような微分方程式について考えてみます。

$f(x)$ の微分と $f(x)+C$ (C は定数) の微分を考えましょう。これらのグラフを考えると、縦軸方向にずらしただけですから、どちらも傾きは一致します。つまり、これらの微分は一致します。このように、微分が入ると定数分の違いについての情報が失われてしまうわけです。そこで、逆に、微分から元の関数を決定する場合には、微分の他に、なんらかの定数 (**初期値**) を与える必要があります (4.7 章を参照してください。)。

さらにより複雑な微分の場合はどうでしょうか。n 階の微分 $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ などが入っている場合を考えましょう。上で述べたような考え方から、1 回微分する毎に、一つの定数についての情報が失われます。逆に、n 階の微分から元の関数を決定するためには、一般に、n 個の定数を決定決定する必要があります。具体的には、初期の状態を考えることで、これらの定数を決めることができます。

今回の場合には、実は、解は次のように二つの定数 A, ϕ_0 を含む形で書くのが最も正しい書き方です。もちろん、これは、元の方程式が 2 階の微分を含んでいることに対応します。

$$\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t+\phi_0) \\ v &= \frac{dx}{dt} \\ &= A\omega\cos(\omega t+\phi_0) \end{aligned}$$

振動を開始させたとき ($t=0$) の位置と速度の情報が A, ϕ_0 を決めることになります。このような種類の知識は、考え方の道標になりますから、是非大事にしたいものです。

6.2 単振動と等速円運動

等速円運動の復習から始めます。x 軸と y 軸で作られる平面内の等速円運動を考えましょう。式 () を思い出してください。等速円運動の運動方程式は、**動径方向** (通常、回転の中心と物体を結ぶ直線上の方向で、中心から外向きを正とします。) について

$$F = -m\frac{v^2}{r}$$

と書けました。ここで、負号がついているのは、力 (あるいは加速度) が中心向きであることを現しています。力 F は万有引力であったり、電磁気の力であったり、ローレンツ力であったりします。いずれにしても、力 F の大きさは一定で、時間変化しないものでした。また、いつも物体から中心に向かって作用しました。

この運動方程式をベクトルとして考え直して、x 成分と y 成分とに分解できるか検討してみることにしましょう。すると次のようになります。回転中心を原点と

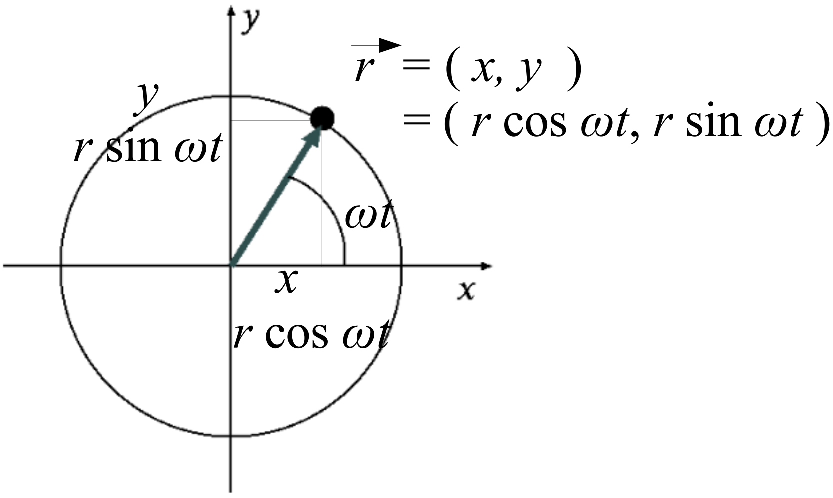

図 42: 等速円運動の位置ベクトル

して、原点から物体へ伸びる位置ベクトルを考えます。この位置ベクトルの成分(物体がある場所の座標) は、図中の x 軸から測った角度 ωt と三角関数を使って書き表すことができます。

$$(x, y) \quad = \quad (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \tag{5}$$

ここで、ωt の部分について補足します。今考えているのは、等速円運動ですから、x 軸から測った角度は時間に比例して増大します。そこで、その角度は、比例定数を ω として、ωt と書き表すことができます。単振動のところで ω を**角速度**と呼びました。等速円運動の場合も同様に角速度と呼びます。この図を見ると、角速度と呼ぶにふさわしい量であることがわかると思います。

次に、力 F をベクトルで書くことを考えましょう。等速円運動の場合、力は、

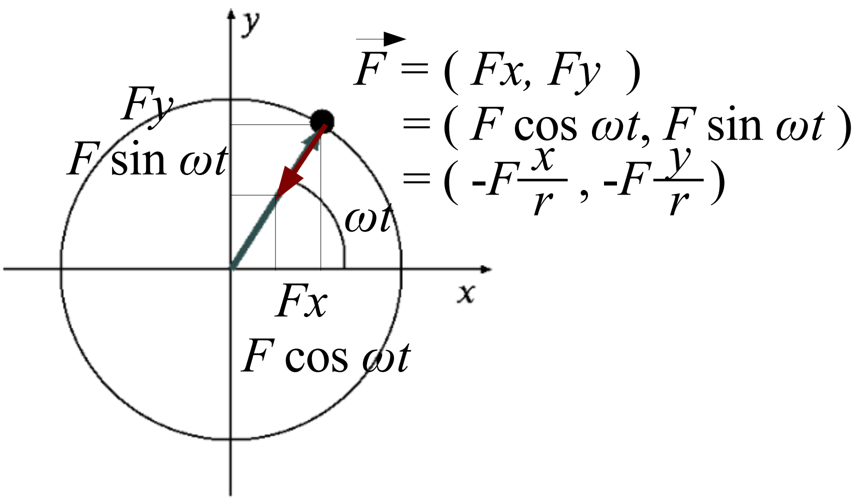

図 43: 等速円運動の力

物体から中心に向かって作用します。そこで、中心向きの力 F をベクトルで書く

とすると、位置ベクトル $\vec{r}$ の定数倍 (ただしこの定数は負の値) で書くことができるはずです。位置ベクトル r の大きさを r とします。すると、位置ベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r} = (x, y) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ と同様に考えて、力 $\vec{F}$ を成分ごとに (F_x, F_y) 表してみます。

$$(F_x, F_y) = (-F\cos\omega t, -F\sin\omega t)$$

ここで、$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ は、式 (5) を用いることで、それぞれ、$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ と書くことができます。これを用いると、力 F の成分は次のようになります。

$$\begin{aligned}(F_x, F_y) &= (-F\cos\omega t, -F\sin\omega t) \\ &= \left(-F\frac{x}{r}, -F\frac{y}{r}\right)\end{aligned}$$

こうして力 F をベクトルの成分で表現できました。そこで、改めて運動方程式を x 成分と y 成分それぞれに分けて考えてみます。x 方向の加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ と書けますので、運動方程式は次のようになります。

$$\begin{aligned}-F\frac{x}{r} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ -F\frac{y}{r} &= m\frac{d^2y}{dt^2}\end{aligned}$$

これを良く見ると、等速円運動の x 成分と y 成分は、それぞれ単振動の運動方程式と同じ形であることがわかります。等速円運動の x 成分だけ、あるいは、y 成分だけ取り出すと、それは単振動と同じように見えることを意味しています。

6.3 単振り子

今度は、次の図のような**単振り子**を考えましょう。糸は質量が無くて伸び縮みもしないとします。このような糸につり下げられたおもりは、単振り子と呼ばれています。単振り子に作用する力を考えると、重力と、おもりに接している糸とおもりの間に働く力 (これを**張力**といいます) だけです。この二つの合力によっておもりは運動します。

このおもりの運動を考えるために、運動方程式を立ててみましょう。原点をおもりの最下点にとり、また、振り子の運動を 2 次元平面内であるとします。すると、

$$\begin{aligned}-T\frac{x}{\ell} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ T\frac{\ell - y}{\ell} - mg &= m\frac{d^2y}{dt^2}\end{aligned}$$

となります。ここで、図中の角度 θ に対して、$\sin\theta = \frac{x}{\ell}$, $\cos\theta = \frac{\ell - y}{\ell}$ であることを利用しています。この関係は図で確認しておきましょう。ここで T について考えてみましょう。T は外部から与える力では無く、必要に応じて糸が伸び縮みし

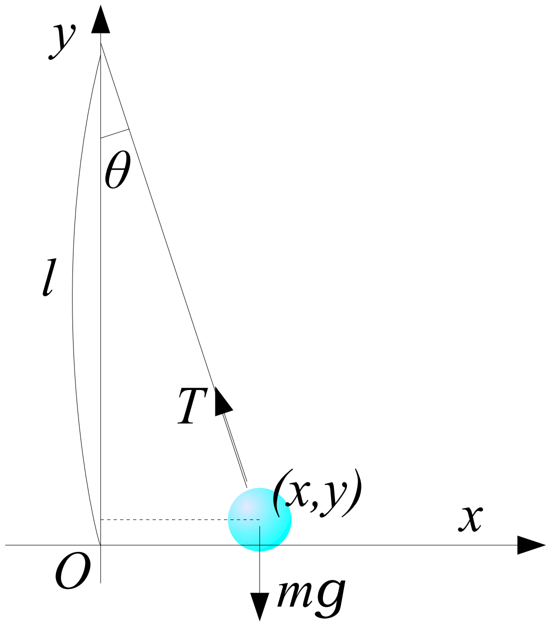

図 44: 単振り子

ないように自動的に決まる力です。したがって、現時点では、その大きさはわかりません。ただ、糸の張っている方向に作用していることだけはわかるだけです。そこで、この T については、十分に注意する必要があります。

簡単のために、θ が十分に小さい場合を考えます。すると、おもりの運動はほとんど x 軸上だけになります。そのため、y 方向の運動は無視でき、y 方向の加速度がゼロであると仮定してもよさそうです[21]。

すると、y 方向の運動方程式に $y=0$ を代入すると次のようになります。

$$T - mg = 0$$

そこで、再び、x 方向の運動方程式をもう一度見てみましょう。$T=mg$ を代入すると、次のようになります。

$$-\frac{g}{\ell}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

この方程式は、単振動と同じです。そこで、次のようになります。

$$x = A\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$$

この解から得られる結論の一つは、近似の成り立つ範囲では、振れ幅によらない、ということです。これを振り子の**等時性**といいます。**ガリレオ・ガリレイ**は、

[21]実際には、ここの議論は省略しすぎています。より正確な議論については、「力学」で学ぶ機会があるといいと思います。

教会の天井から下げられた燭台が揺れるのみて、振り子の等時性に気づき、自分の脈拍でそれを測った、という話が残っています。

最後にもう一度、単振動と等速円運動の関係についてコメントしておきましょう。x 方向の単振動と y 方向の単振動とを重ね合わせると等速円運動も作ることができますし、その他にもいくつかのおもしろい運動を作ることができます。

6.4　波動

波について、スプリングを用いて、その振動の様子を調べてみましょう。まず、波には**縦波**と**横波**があります。この違いは、時々誤解を招くことがあるので良く理解するようにしてください。

縦波

波の進む向きと振動の向きが平行な波
例: 音波, 地震の P 波 (これも実は音波)

横波

波の進む向きと振動の向きが直交している波
例: 光、地震の S 波

まず、スプリングの各点はずっと移動していくわけではなく、各点各点がそれぞれ振動していることに気をつけましょう。そして、それぞれの点がどの向きに振動しているか、それに注目してみましょう。

ここで、各点での振動について、式に書いてみましょう。x の値を特定の値に固定した場合、波の式は次のように書けます。

$$z = A\sin(-\omega t + P(x))$$

振動の角速度は同じであっても振動の様子 (変位) は場所によって異なります。そこで、$P(x)$ という項を置いています。時間についての比例定数は正の値でも負の値でも構いません。後々のために比例定数を定義するときにここでは $-\omega$ を比例定数として定義しています。ここで現れる ω も**角振動数**といいます。三角関数 $\sin\theta$ は、θ の値が 2π だけずれても同じ値になります。そこで、ωt の値が 2π だけずれても変位 z は同じ値になります。つまり、時間が $\frac{2\pi}{\omega}$ 変化すると、また、元と同じ状態にもどるわけです。このような時間 $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ を**周期**といいます。

今度は、ある時刻 (つまり、ある瞬間) の波の様子を見てみましょう。すると、こうなっているはずです。

$$z = A\sin(kx + Q(t))$$

これも波のかたちをしています。同様に変位は時刻にもよるはずですから、その依存性を $Q(t)$ で表しています。k は波数と呼ばれる量です。x の値が $\frac{2\pi}{k}$ だけ変化

すると kx の値は 2π 変化しますから、変位 z また元と同じ値になります。この長さ $\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$ を波長といいます。逆に k は、波長を使うと $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ と定義されます。これは単位長さ当たりに何周期分の波が入っているかを表すので、**波数**と呼ばれています。

これらを総合すると、波による変位は、一般に次のように表すことができることがわかります。

$$z = A\sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

ここで、変位 z が一定になるためには、三角関数 sin の引数部分 (これを**位相**といいます。) $kx - \omega t + \phi_0$ が一定である必要があります。時刻 t に対して、x の値を $\frac{\omega}{k}t = \frac{T}{\lambda}t$ だけ変化させるると位相は一定になります。そこで、t についての係数部分 $\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ は波の速さ (特に**位相速度**) といいます。

一般に波には次のような性質があります。

1. **反射**

   波は壁などに当たると反射する性質があります。

2. **干渉**

   二つの波が重なると、場所によって強めあったり弱めあったりします。この現象を干渉といいます。

3. **回折**

   波が狭い場所を通過すると、そこから波は広がるように伝わります。この性質を回折といいます。

4. **屈折**

   波の伝わる速さが場所によって異なる場合があります。例えば光は水の中では空気中より遅くなります。波が、波の速さが異なる場所に到達した場合、波の進行方向が変化します。これを屈折といいます。

これらの性質は三角関数の性質を用いて説明することができます。しかし、ここでは、これらの性質について述べるだけにしておきます。

7 原理

7.1 原理とは

これまで、「〜の**法則**」というものがいくつも現れてきました。そうしたものが、どうして成り立つのか、それを知りたいのは人間の「性（さが)」であると言えます。どうして運動量保存の法則が成り立つのか、また、ニュートンの運動の法則が成り立つのはどうしてか。

「法則」と似たような言葉に「**原理**」というものがあります。まず、この二つの言葉の違いについて書きましょう。一般的には、この二つの言葉あ区別されています。「原理」は、それを説明しようとしても説明できないものです。様々な現象が起こっていることを考えると、それを受け入れるしかない、というものです。そして、「原理」は証明することはできなものです。それに対して、「法則」は、やや性質が異なります。「法則」は、基本的には、何らかの原理に基づいて証明や説明ができるものです。

例えば、「ケプラーの法則の第三法則」は、ニュートンの運動の法則の第二法則(運動方程式) から導くことができます。このような意味で、「ケプラーの法則の第三法則」は、「原理」と呼ぶことはできません。

しかし、「法則」と名前がついていても、この講義では「原理」として扱っているものがあることがわかると思います。例えば、ニュートンの運動の法則は、この講義の中では「原理」として扱っています。一方、「原理」と名前がついていても、「原理」と見なすのは難しいものもあります。有名な例は浮力についての「**アルキメデスの原理**」や「**てこの原理**」などと呼ばれているものです。このようにしてみると、「法則」と「原理」の区別は厳密に行われている訳ではありません。

ただ、やはり重要な原理がいくつかあります。ここでは、それらのうちのいくつかを扱ってみたいと思います。

7.2 重ね合わせの原理

月に向かった宇宙船は、地球と月との間で、地球とロケットの間で作用する万有引力と、月とロケットの間で作用する万有引力と、両方の力を受けます。そして、その力は、

> 地球とロケットだけが存在するとしたときに、地球とロケットの間で作用する万有引力

と

> 月とロケットだけが存在するとしたときに、月とロケットの間で作用する万有引力

とを、(ベクトル的に) 足し算したものです。

ここで、それが当たり前だと思った人は、どれくらいいるでしょうか。当たり前だと思った人は、なぜ、足し算で良いのか、説明してみてください。おそらく、できないと思います。そして、例えば、

> 月がある場合に、地球とロケットの間に作用する万有引力が影響を受けて、月が無い場合に比べて大きな力になる

というようなことがあっても不思議ではありませんし、その可能性を否定する根拠はありません。ところが、実際にはこのようなことは起こらず、単純な足し算で表されるようだ、ということです。これは、原理として受け入れるべき内容です。つまり、これは説明しようとしてもできないような種類のものであると考えるべきです。このように、複数の力が、単にそれらの (ベクトル的な) 足し算で表現できることは、「**重ね合わせの原理**」と呼ばれています。

重ね合わせの原理は、波動についても適用されます。そして、重ね合わせの原理がもっとも多く登場するのは波動についてです。ある場所に "二つ" の波が到達したとき、波による変位は二つの波それぞれに伴う変位の足し算になります。これが波についての重ね合わせの原理です[22]。

一方で、電子や原子など、微小な世界を扱う学問である量子力学に現れる波動 (物質波) や、電磁気学で現れる電磁波は、重ね合わせの原理が成り立つような波動です。

7.3 運動量保存の法則

運動量保存則は、ニュートンの力学の法則の第三法則である**作用反作用の法則**から導きました。そのような意味では、作用反作用の法則の方が、より「原理」としてふさわしいことになります。

しかし、5.5 章の議論を思い出してください。作用反作用の法則が成り立たないケースがありました。これはどのように考えたらいいのでしょうか。

以下に述べることはこの講義の範囲を越えるので、簡単に説明します。実は、この場合は作用反作用の法則は成り立たないものの、運動量保存則は成り立っています。電子が互いに力を及ぼしあうとき、電子の周りの**電場**が変動します。その電場の変動は**電磁波**を生み出します。そして、実は、電磁波は運動量を持っていると考えられています。その電磁波の運動量も合わせると、全体で運動量が保存するようになります。

このように考えると、実際には作用反作用の法則よりも運動量保存則のほうが原理としてふさわしいことがわかります。そして、実際、運動量保存を原理として考えることで、電磁波を含まない場合の作用反作用の法則を導くことができます。

[22]ただし、最もわたしたちが想像しやすい海の波など、流体の波については厳密な意味では重ね合わせの原理は成り立ちません。

このように、物理学の進展によって、これまで原理だと思われていたことよりも、より原理としてふさわしいものが見つかることがあります。

7.4　相対性原理

ガリレオ・ガリレイは慣性の法則を見つけました。そこで、ある物理学的な現象を、慣性運動しているような座標系から数学的に書き直すことを「**ガリレイ変換**」というようになっています。

ここで、思考実験をしてみましょう。私が消しゴムを手に持ち、それを静かに放して落としたとします。それを自転車に乗って一定の速度で移動するガリレイ君(仮名)が観察したとします。ガリレイ君からはどのように見えるでしょうか。言葉を代えると、自由落下は、ガリレイ変換によってどのように記述されるでしょうか。

私が手に持っている状態で、ガリレイ君が消しゴムを見ると、それは、ガリレイ君の進む向きとは反対の向きに等速直線運動しているように見えるはずです。そして、私が手を放すと、慣性の法則に従って、やはりガリレイ君の進行方向とは逆の向きに進みながら、鉛直方向には自由落下するように見えるはずです。

ここでのポイントは、ガリレイ君が観察する世界でも、私が観察する世界でも、全く同じ物理法則 (「慣性の法則」や「自由落下」) が成り立っているということです。これも、当たり前のようではあります。しかし、説明が困難で、原理として受け入れるべきものです。このように、等速直線運動しながら観察しても、同じ物理法則が成り立つことは、「**ガリレイの相対性原理**」と呼びます。

7.5　新たな原理

さて、この講義も、もうすぐ最後です。そこで、一つ問題を出してみます。

> 電磁気学のところで学んだように、並行して進む荷電粒子 (簡単のために、同じ符号で大きさも同じとする) は、荷電粒子同士のクーロン力の他に、磁気を介して互いに引き合うことになる。
>
> ところが、これにガリレイの相対性原理を適用して、荷電粒子と共に移動しながら観察すると、荷電粒子は止まったままであり、クーロン力だけが作用して、磁気を介した引力は作用しない。
>
> その結果、どのような立場で観察するかによって、二つの荷電粒子間に作用する力の大きさが変わることになる。更に、その後の荷電粒子の運動の様子も、観察者によって変わってしまうことになる。
>
> これをどう説明するか？

このように、原理や法則に従って説明した結果、矛盾した結論が得られるような問題を「**パラドクス**」と言います。この問題は典型的なパラドクスです。皆さん

はどのように答えますか？

このパラドクスは難しいので、ここで答えを書きます。それは、ガリレイの相対性原理が間違っていたのです。そして、それに対応する新しい原理があります。それは「**アインシュタインの相対性原理**」です。アインシュタインは、この他に、もう一つ原理を提案しました。それは「**光速度不変の原理**」です。もう気づいているかもしれませんが、こうした原理を基にして組み上げられた理論がアインシュタインの**相対性理論** (正確には**特殊相対性理論**) なのです。

また、量子力学には「**ハイゼンベルグ**の**不確定性原理**」と呼ばれるものがあります。

20 世紀になり、物理学には「量子力学」や「相対性理論」が登場しました。そして、新しい物理学的世界観が切り拓かれました。そして、その背景には、「新たな原理」があったことも付け加えたいと思います。

興味を持った人は、更に物理学を勉強してみてください。

A　物理学に出てくる数学

A.1　ギリシア文字

小文字	大文字	斜字体	読み方
α	A	A	アルファ
β	B	B	ベータ
γ	Γ	$\mathit{\Gamma}$	ガンマ
δ	Δ	$\mathit{\Delta}$	デルタ
$\epsilon(\varepsilon)$	E	E	イプシロン
ζ	Z	Z	ゼータ
η	H	H	イータ
$\theta(\vartheta)$	θ	$\mathit{\Theta}$	シータ
ι	I	I	イオタ
κ	K	K	カッパ
λ	Λ	$\mathit{\Lambda}$	ラムダ
μ	M	M	ミュー
ν	N	N	ニュー
ξ	Ξ	$\mathit{\Xi}$	グザイ
o	O	O	オミクロン
$\pi(\varpi)$	Π	$\mathit{\Pi}$	パイ
$\rho(\varrho)$	P	P	ロー
$\sigma(\varsigma)$	Σ	$\mathit{\Sigma}$	シグマ
τ	T	T	タウ
υ	Υ	$\mathit{\Upsilon}$	ウプシロン
$\phi(\varphi)$	Φ	$\mathit{\Phi}$	ファイ
χ	X	X	カイ
ψ	Ψ	$\mathit{\Psi}$	プサイ
ω	Ω	$\mathit{\Omega}$	オメガ

A.2　ベクトル

ベクトルについては、4.1.2 節も参照してください。

ベクトルとは

向きと大きさを持ったものを**ベクトル**といいます。図としては矢印で表すことが多いです。矢印の根元を**始点**といい、矢印の先端を**終点**といいます。

ベクトルの成分表示

ベクトルを矢印で書いただけでは、大きさについての数量的な議論 (**定量的**な議論) ができません。そこで、ベクトルを数値で表すことを考えます。

通常は、3 次元の普通良く用いる座標系 (直交直線座標系, デカルト座標系) を用います。そこで、ベクトルの成分は図に示したような 3 つの数値を書き並べて表します。

A.3　指数法則

指数法則については、3.4 も参照してください。

指数とは

10^2 のように、ある数字の右肩上に数字を書くことがあります。このような右肩上に書く数字のことを**指数**といいます。この場合は、10 を 2 回続けて掛け合わせることを意味します。このような考え方から、指数は整数だけのようにも思われます。しかし、次のような**指数法則**から分数や小数についても定義することができます。

1. $A^pA^q = A^{p+q}$
2. $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$
3. $A^0 = 1$
4. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$
5. $(AB)^p = A^pB^p$
6. $(A^p)^q = A^{pq}$
7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$, $\cdots$

A.4　三角関数

関数

ある値 x を決めるとそれに応じた値 y が決まるとき、y は x の関数といいます。

三角関数

次の図のように、角度 θ に対して $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を決めます。これらは直角三角形の辺の長さやそれらの比を表しています。これらは角度 θ の関数なので、三角関数といいます。

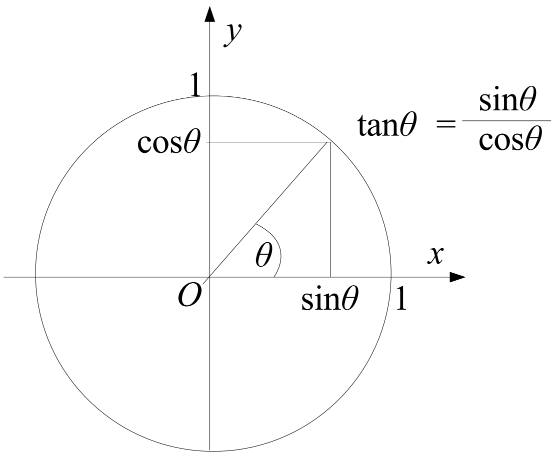

図 45: 三角関数の定義

弧度法

角度を表すときには、弧度法を用いることが多いです。半径 1 の円 (単位円) に弧が一致する扇形を描いた時、弧の長さを角度とするものです。90 °は $\pi/2$, 180 °は π, 360 °は、2π になります。

その他の三角関数

三角関数は 6 種類あり、それらは相互に次の図で表される関係にあります。

この図は、三角関数の次のような性質を表しています。

1. 左側の関数名に “co” をつけるたものが右側の関数名になる。
2. ある三角関数は、その両隣の積で表される。
3. 1 を挟んで両側の三角関数は互いに逆数の関係にある。
4. 下向きの三角形については、三平方の定理に対応する関係式がある。
   (a) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
   (b) $\tan^2\theta + 1^2 = \sec^2\theta$
   (c) $1^2 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

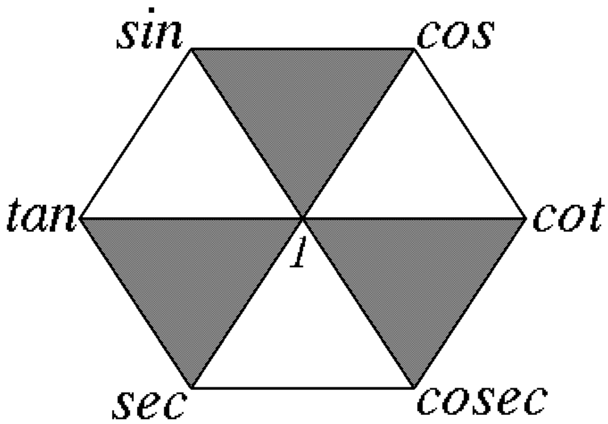

図 46: 6 種類の三角関数の定義

加法定理

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

この公式は、複素数についてのガウスの式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$(i は虚数単位 $i^2=-1$) さえ覚えておけば、指数法則を適用することで導くことができます。

$$\begin{aligned}e^{i(\alpha+\beta)} &= \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}}+i\ \underline{\sin(\alpha+\beta)} \\ e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) \\ &= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}}+i\left(\underline{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}\right)\end{aligned}$$

A.5　微分

微分とは

関数 $f(x)$ のグラフを、横軸に x、縦軸に $f(x)$ をとって描く。このとき各 x に対応して傾きが定まる。つまり、x の関数として $f(x)$ の傾きが定まる。これを「$f(x)$ の x についての微分」といいます。

なお、傾きとは、x の値が Δx だけ増えたときに、$f(x)$ が Δf だけ増えたとすると、$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ のことです。Δx が大きいと、Δf も大きいと予想されます。Δx が小さいと、Δf も小さいと予想されます。ところが、その比 ($\Delta f/\Delta x$, 傾き) はそれほど変わらないだろうし、Δx を小さくすると一定の値に近づくと予想されます。そうして一定の値になったもの微分です。

代表的な関数の微分

$$\begin{aligned}\frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1}\\ \frac{d\sin x}{dx} &= \cos x\\ \frac{de^x}{dx} &= e^x\end{aligned}$$

微分の公式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(af(x)\right) &= a\frac{df(x)}{dx}\\ \frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) &= \frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}\\ \frac{d}{dx}\left(f(x)\times g(x)\right) &= \frac{df(x)}{dx}\times g(x)+f(x)\times\frac{dg(x)}{dx}\\ \frac{df(g(x))}{dx} &= \frac{df(g)}{dg}\times\frac{dg(x)}{dx}\end{aligned}$$

※ a は定数とします。

A.5.1　2次関数の微分

このように説明されれても、具体的なイメージは湧きにくいと思います。そこで、具体例を挙げてみましょう。一般に t^n などで表すことができる関数を**代数関数**といいます。代数関数の中で、親しみがあると思われる **2 次関数**について考えてみましょう。つまり、次のような関数です。

$$\begin{aligned}x &= f(t)\\ &= at^2\end{aligned}$$

ここで a は定数であるとします。

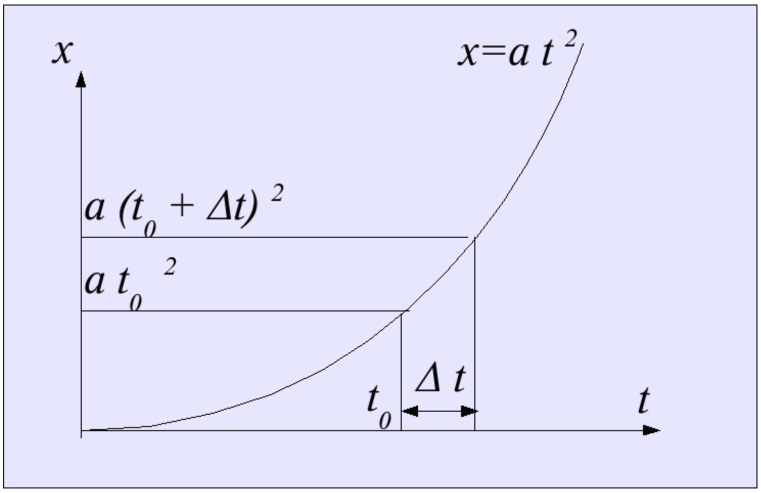

図 47: 二次関数の微分

微分するということは、t を与えたときに、その $(t, f(t))$ での傾きを t の関数として求めることです。そこで、$t = t_o$ とおいて、この周辺で考えます。点 A を (t_o, at_o^2) とします。点 B は、点 A から少しだけずれた点を考えますから、$t = t_o + \Delta t$ とします。Δt と書いたものは、二つの文字変数ではなく、ひとかたまりですので注意してください。小さな変化量を表すときにこのような書き方をよくします[23]。すると B 点の縦軸 (x) の値は、$a(t_o + \Delta t)^2$ です。AB を結ぶ直線の傾きを考えましょう。点 A と 点 B で考えると、横軸に沿って値は Δt だけずれています。縦軸に沿っては、$a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2$ だけずれています。そこで、次の値が傾きになります。

$$\frac{a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2}{\Delta t}$$

なんだか全然簡単ではありませんね。更に、点 B を点 A に近づける、つまり、Δt をゼロに近づけるなんて、とても難しそうです。しかし、あきらめないで、これを変形してみましょう。まず、2 乗している部分を展開してみます。

$$\begin{aligned}
\frac{a(t_o + \Delta t)^2 - at_o^2}{\Delta t} &= \frac{a(t_o^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - at_o^2}{\Delta t} \\
&= \frac{at_o^2 + 2at_0\Delta t + a\Delta t^2 - at_o^2}{\Delta t} \\
&= \frac{2at_0\Delta t + a\Delta t^2}{\Delta t} \\
&= 2at_0 + a\Delta t
\end{aligned}$$

最後のところでは、Δt で約分しています。次に、Δt をゼロに近づけてみましょう。分子と分母に Δt が入っている場合には、Δt をゼロに近づけるのは難しそうでした。しかし、$2at_0 + a\Delta t$ について Δt をゼロに近づけた時の値を考えるのは簡単です。Δt にゼロを代入すればいいのです。したがって、答えは $2at_o$ です。

[23] Δ は デルタ と読みます。“t の値の違い” を表すとき、 “difference” の “d” に対応するギリシア文字の Δ を使うことがよくあります。

ゼロに近づけることを表す場合には、$\lim_{\Delta t \to 0}$ という記号を用いることが多いです。そこでこれまでの結果をまとめると、次のようになります。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t_o+\Delta t)^2 - a t_o^2}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \{2at_0 + a\Delta t\} \\ &= 2at_o\end{aligned}$$

t_o はどんな値でも構いませんから、これを改めて t と書きます。すると、元の関数 $x=f(t)$, $f(t)=at^2$ を微分して t の関数として微分係数が $2at$ が求まったことになります。

A.5.2 微分表記

このように微分を行うことができました。微分については、次のような表記が一般的です。まず、関数 $f(t)$ に対して、それを微分したものを $f'(t)$ と書くことがあります。

$$\begin{aligned}f(t) &= at^2 \\ f'(t) &= 2at\end{aligned}$$

次に、$x=at^2$ とした場合には、

$$\begin{aligned}x &= at^2 \\ \frac{dx}{dt} &= 2at\end{aligned}$$

とします。微分を表す記号の d は、Δ と同様に小さな違いを表すために付けられています。dx は x の小さな違い (縦軸方向のずれ)、dt は t の小さな違い (横軸方向のずれ)、$\frac{dx}{dt}$ は、それらの比で、傾きを表している訳です。x を $f(t)$ に置き換えて、次のように表すこともあります。

$$\begin{aligned}f(t) &= at^2 \\ \frac{df(t)}{dt} &= 2at\end{aligned}$$

さらに、分子側の表記 ($f(t)$) が長い場合には、次のように書くこともあります。

$$\frac{d}{dt}f(t) = 2at$$

A.5.3 基本的な関数の微分

1. **代数関数**

$$\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$$

これを証明してみましょう。Δt が沢山現れるので、以下では h で置き換えます。

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^n-t^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(t^n+nht^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2t^{n-2}\cdots)-t^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nht^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2t^{n-2}\cdots}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{nt^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}ht^{n-2}\cdots\right\} \\
&= nt^{n-1}
\end{aligned}
$$

例として、1 次関数と 2 次関数について見てみましょう。

- 1 次関数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= at \\
f'(t) &= a
\end{aligned}
$$

※ $y=ax+b$ という 1 次関数を学校で勉強したかもしれません。a は「傾き」と言っていませんでしたか？

- 2 次関数

$$
\begin{aligned}
f(t) &= at^2 \\
f'(t) &= 2at
\end{aligned}
$$

※ これについては既に詳しくやりました。

2. 三角関数

$$
\frac{d\sin t}{dt} = \cos t
$$

これを加法定理を使って計算してみます。

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(t+h)-\sin t}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin t\cos h+\cos t\sin h)-\sin t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin t\cos h-\sin t+\cos t\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sin t\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to 0}\cos t\frac{\sin h}{h} \\
&= \sin t\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos t\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}
\end{aligned}
$$

それぞれの極限 $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ を求めることは数学の教科書を読んでみてください。ただ、グラフを描けばすぐにわかるように、 $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=$

$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(0+h)-\cos 0}{h}$ は原点付近での 余弦関数 $\cos t$ の傾きであり、これはゼロです。また、$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h}$ で、正弦関数の原点付近での傾きがこれにあたります。これは 1 になります。

そこで結局 $\frac{d \sin t}{dt} = \cos t$ となります。

3. 指数関数

$f(t) = a^t$ と書けるような関数を t の**指数関数** といいます。このグラフを描いてみると、t が小さいほど傾きが小さいことが予想されます。また、t が大きいほど傾きが大きいことが予想されます。つまり、指数関数の微分は指数関数と似た形になることが予想されます。実際、指数関数の微分は指数関数になります。

今度は、a の値によってどのように変化するか考えてみましょう。a の値が大きいと $f(t)$ の値も傾きも大きくなります。逆に a の値が小さいと $f(t)$ の値も傾きも小さくなります。そこで、ちょうどいい値の場合に $f(t)$ を微分すると $f(t)$ と全く同じものが得られるようになります。つまり、$f'(t) = f(t)$ となるものが得られます。その時の a の値は、**自然対数の底**と呼ばれ e で表します。$e = 2.71828182846\cdots$ です。

このような経緯から、次のようになります。

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t \\ f'(t) &= e^t \end{aligned}$$

A.5.4　微分と近似

微分の定義がわかると、微分を使った便利な式が得られます。まず、微分の定義から出発します。

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

等号は Δt がゼロに近づいた場合だけ成り立ちます。しかし、Δt がある程度小さければ、近似的に成り立つと考えてもいいでしょう。二点 A B を結ぶ直線が接線と近いことに対応しています。そこで、次のような近似的な関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned} f'(t) &\simeq \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ f'(t)\Delta t &\simeq f(t+\Delta t) - f(t) \\ f(t) + f'(t)\Delta t &\simeq f(t+\Delta t) \end{aligned}$$

$f(t)$, $f'(t)$ がわかれば、t が少し (Δt) だけ変化したときの関数の値 $(f(t+\Delta t))$ を近似的に表すことができる訳です。

A.5.5 微分の計算規則

微分の計算には次のような規則があります。

1. 定数倍
$$\frac{d}{dt}(af(t)) = a\frac{df(t)}{dt}$$
微分の定義を用いて考えると、次のようになります。
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{af(t_0+\Delta t)-af(t_o)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} a\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t}\\ &= a\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t}\end{aligned}$$
ゴムのように伸び縮みする素材にグラフを描いたことを想像してみましょう。縦軸方向に伸び縮みさせると、それに応じて傾きも大きくなったり小さくなったりします。縦方向に 2 倍にすれば、縦軸方向のずれは全て 2 倍になるので、傾きも 2 倍になります。

2. 足し算
$$\frac{d}{dt}(f(t)+g(t)) = \frac{df(t)}{dt}+\frac{dg(t)}{dt}$$
微分の定義を用いて考えると、次のようになります。
$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)+g(t_0+\Delta t))-(f(t_o)+g(t_o))}{\Delta t}\\ =& \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)-f(t_o))+(g(t_0+\Delta t)-g(t_o))}{\Delta t}\\ =& \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_o)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_o)}{\Delta t}\end{aligned}$$
縦軸方向のずれが二つの部分にわかれている場合には、それぞれのずれを足し合わせれば、全体のずれになることは当り前です。

3. かけ算
$$\frac{d}{dt}(f(t)\times g(t)) = \frac{df(t)}{dt}\times g(t)+f(t)\times\frac{dg(t)}{dt}$$
これも微分の定義に立ち返って考えてみましょう。
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t_0+\Delta t)\times g(t_0+\Delta t))-(f(t_o)\times g(t_o))}{\Delta t}$$
ここで、$f(t_0+\Delta t)$ が近似的に $f(t_0)+f'(t_o)\Delta t$ と表されることを思い出すと、次のようなものの極限を考えればよさそうです。
$$\begin{aligned}&\frac{((f(t_0)+f'(t_o)\Delta t)\times(g(t_0)+g'(t_o)\Delta t))-(f(t_o)\times g(t_o))}{\Delta t}\\ =& \frac{f(t_0)g(t_0)+f(t_o)g'(t_o)\Delta t+f'(t_o)g(t_o)\Delta t+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t^2-f(t_o)g(t_o)}{\Delta t}\\ =& \frac{f(t_o)g'(t_o)\Delta t+f'(t_o)g(t_o)\Delta t+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t^2}{\Delta t}\\ =& f(t_o)g'(t_o)+f'(t_o)g(t_o)+f'(t_o)g'(t_o)\Delta t\end{aligned}$$

これは、$f(t_o)g'(t_o) + f'(t_o)g(t_o)$ に近づきます。

4. 合成関数の微分

$$\frac{df(g(t))}{dt} = \frac{df(g)}{dg} \times \frac{dg(t)}{dt}$$

f が g の関数で、その微分 $\frac{df(g)}{dg}$ を求めることができたとします。それは、g が Δg だけ変化した時に、f が変化する量 Δf を割合の形で表しています。例えば、$\frac{df(g)}{dg}$ が 2 ならば、$\Delta f \simeq 2\Delta g$ です。

g が t の関数で、その微分 $\frac{dg(t)}{dt}$ を求めることができたとします。これについても同様で、例えば、$\frac{dg(t)}{dt}$ が 3 だとしましょう。すると、$\Delta g \simeq 3\Delta t$ です。

この二つを組み合わせると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq 2\Delta g \\ &\simeq 2(3\Delta t) \\ &\simeq 6\Delta t \end{aligned}$$

これと同じような計算をすることで、一般に、$\Delta f \simeq \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(t)}{dt}\Delta t$ となることがわかります。

このような計算の規則を用いると、微分できるものが格段に増えます[24]。

A.5.6　微分の計算の練習

ここまでに書いたことが、微分についての基本的な知識です。しかし、実際に使いこなすまでには、やはり、ある程度の練習が必要です。

- 例 1

  特に合成関数の微分の練習は慣れないと難しいです。例えば、$\cos t$ の微分について考えましょう。$\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ を使って考えます。$f(g) = \sin g$, $g(t) = t + \frac{\pi}{2}$ と対応させることができます。そこで、次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\cos t &= \frac{d}{dt}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{d}{dt}f(g(t)) \\ &= \left(\frac{df}{dg}\right)\left(\frac{dg}{dt}\right) \end{aligned}$$

[24]残りの微分の規則は逆関数の微分に関するものです。これは改めて別のところで学習することでしょう

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{dg}\sin g\right)\left(\frac{d}{dt}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= (\cos g)\,(1) \\
&= \cos g \\
&= \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\sin t
\end{aligned}
$$

- 例 2

  $\frac{1}{\sin t}$ を t について微分してみましょう。この微分を考えるには、$f(g)=\frac{1}{g}=g^{-1}$, $g(t)=\sin t$ として考える必要があります。すると、次のようになります。対応関係を考えるのが難しいかもしれません。しかし、逆に対応関係さえわかってしまえば理解できると思います。じっくり時間をかけて対応を考えてみてください。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{\sin t} &= \frac{d}{dt}f(g(t)) \\
&= \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dt} \\
&= \left(\frac{d}{dg}g^{-1}\right)\left(\frac{d}{dt}\sin t\right) \\
&= \left((-1)g^{-2}\right)(\cos t) \\
&= -\frac{1}{\sin^2 t}\times\cos t
\end{aligned}
$$

- 例 3

  合成関数の微分を用いると、次のような、覚えなくてもいいけれども覚えておくと大変便利な公式が得られます。自分で導いてみましょう。

  – $\frac{d}{dt}f(at+b)=af'(at+b)$
  – $\frac{d}{dt}\frac{1}{f(t)}=-\frac{f'(t)}{f^2(t)}$
  – $\frac{d}{dt}\frac{g(t)}{f(t)}=\frac{g'(t)f(t)-f'(t)g(t)}{f^2(t)}$

以上が微分に関する基礎的な知識です。これらを使って、与えられた関数のグラフの傾きを計算することができるようになりました。以下では、こうした微分を少しずつ使いながら理解を深めていきましょう。

索 引