2次元の弾性衝突を重心系から観察する

2次元の弾性衝突の問題を重心系から観察しよう。ここで、2体とは、物体が2つしかないことを意味する。また、重心系とは、質量中心が静止しているような座標系のことである。あるいは、初期に運動量がゼロであると観察されるような座標系のことであると言ってもよい。

1. x 軸の決定

   2つの衝突する物体AとBを考える。これらが衝突する前の状態を重心系で考える。すると、まず、一方が止まっていて、他方が動いていることは、ありえない。運動量の合計がゼロにならないからである。同様に、これらの物体は、同じ直線上を進み、正面衝突する。運動量がベクトル量であること、ベクトル量の合計がゼロであることを考えると、ベクトルが足してゼロになるためには、逆向きでなければならないからである。

   

   図 1: 重心系から見た衝突前の様子

   そこで、衝突前の運動量ベクトルに沿って、x 軸を定めることにする。

2. $x-y$ 平面の決定

   衝突後の2物体も、運動量保存則から、運動量の合計がゼロである。そこで、衝突後の2つの物体も、同じ直線上を進む。その向きはあらかじめわからないが、x 軸とは一致しないとして良い。x 軸に一致するなら、別途、1次元の衝突の問題として考えればよいし、それは既に考察してある。

   衝突前の物体が進む直線と、衝突後の物体が進む直線を含む面として、$x-y$ 平面を定める。(もちろん、衝突後に y 軸に沿って運動しているわけではない。)

3. 衝突後の運動量の大きさ

   衝突後の運動量の大きさについて考えてみよう。物体A, Bの質量を、それぞれ、m_A, m_B とする。また、衝突前の速度ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{v}_{Ai}, \boldsymbol{v}_{Bi}$ とし、衝突後は、それぞれ、$\boldsymbol{v}_{Af}, \boldsymbol{v}_{Bf}$ となったとする。すると、次式が成り立つ。

$$m_A\boldsymbol{v}_{Ai} + m_B\boldsymbol{v}_{Bi} = 0 \tag{1}$$

$$m_A\boldsymbol{v}_{Af} + m_B\boldsymbol{v}_{Bf} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 \tag{3}$$

(4)

衝突後の物体 A の速さ v_{Af} が、衝突前の物体 A の速さ v_{Ai} からどのように変化したかを調べたい。そこで、運動量保存則 (1),(2) から、物体 B の速さ（速度ベクトルの大きさ）v_{Bi}, v_{Bf} を物体 A の速さ v_{Ai}, v_{Af} で書き表して、エネルギー保存則 (3) に代入する。すると次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{m_B}v_{Af}^2 &= \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{m_B}v_{Ai}^2 \\
v_{Ai}^2 &= v_{Af}^2
\end{aligned}
$$

すなわち、衝突後の物体 A の速さは、衝突前の速さと変わらない。同様のことが物体 B についても言える。

速度ではなく、運動量という言葉で表現すると、衝突前後で、それぞれの物体の運動量の大きさは変化しない。

4. 模式図

結局、物体 A、B について衝突前後の運動量を考えると、４つの運動量が現れるが、それらは、どれも同じ大きさである、とわかる。これを模式図で描くと次のような図にまとめられる。

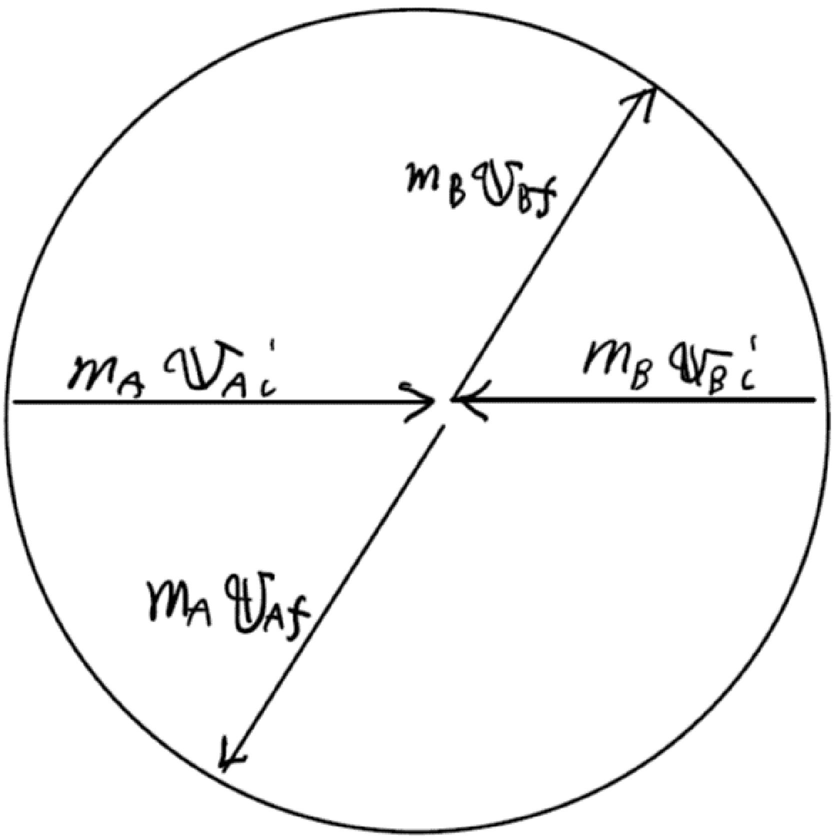

図 2: 重心系から見た衝突前後の運動量ベクトル