積分と慣性モーメント

平成 25 年 7 月 11 日

1 積分について

1.1 不定積分

芳沢先生の「高校数学の教科書 (下)」に準拠して、積分そのものについて復習しよう。

定義 (原始関数, 不定積分, 積分する)

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

であるとき、$F(t)$ を $f(t)$ の 原始関数 あるいは 不定積分 という。$f(t)$ から $F(t)$ を求めることを 積分する という。

表記 (原始関数, 不定積分), 定義 (被積分関数, 積分変数)

$f(t)$ の原始関数 (あるいは不定積分) を次のように書く。

$$\int f(t)\ dt$$

このように書いたとき $f(t)$ を 被積分関数 といい、t を 積分変数 という。

ところが、一般に原始関数は定数 C だけの不定性がある (グラフの曲線の傾きは、曲線を縦軸に沿ってずらしても変化しない)。そこで、$f(t)$ の任意の不定積分は次のような形になる。

定義 (積分定数)

$$\int f(t)\ dt = F(t) + C$$

このように書いたとき C を 積分定数 という。

1.2 定積分

曲線 $y = f(t)$ と t 軸との間に囲まれた領域で、$a < t < b$ の範囲の部分の面積を考える。一般に、t が少し (Δt) だけ変化したとき、a と t の間の面積 $S(t)$ も少し (ΔS) だけ変化するだろう。そして、それらの間には、

$$\Delta S \sim f(t)\Delta t$$

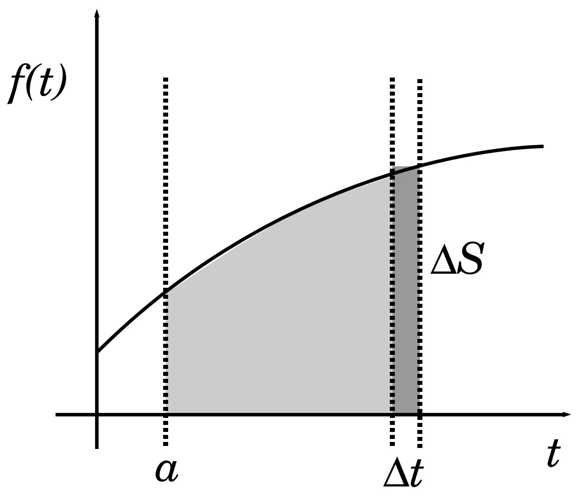
という関係が成り立つだろう。そこで、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{\Delta t} &\sim f(t) \\ \frac{dS}{dt} &= f(t) \end{aligned}$$

となるので、$S(t)$ は $f(t)$ の原始関数である。そこで、$S(t) = F(t) + C$ とおいて、C について考えてみる。$S(a)$ は幅がゼロの面積になるので、

$$\begin{aligned} S(a) &= 0 \\ &= F(a) + C \end{aligned}$$

であるから $C = -F(a)$ である。結局、$S(t) = F(t) - F(a)$ となる。



定義 (定積分、積分区間、下端、上端)

$f(t)$ に対して、$F(b) - F(a)$ を

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad \text{あるいは} \quad [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と書き、$f(t)$ の a から b までの定積分 という。a は 積分区間 の 下端 といい、b は積分区間の 上端 という。

1.3　慣性モーメントの計算

定義 (回転軸の周りの慣性モーメント)

ある物体の慣性モーメントは、

$$(\text{質量}) \quad \times \quad (\text{回転軸からの距離})^2$$

の合計で定義される。連続体の場合には積分で表される。

1. 離散的な場合

   (a) 回転軸から a 離れたところにある質量 M の質点の慣性モーメント I

   $$I \quad = \quad Ma^2$$

   (b) 回転軸から a 離れたところにある質量 M の質点 3 つを合わせた慣性モーメント I

   $$I \quad = \quad 3Ma^2$$

2. 均質な棒の慣性モーメント

   棒の長さを L とする。単位長さの当たりの質量 ρ(これを線密度という) と全質量 M とは次のような関係がある。

   $$M \quad = \quad \rho L$$

   この関係を用いることで、ρ を用いず M を用いて慣性モーメント I を表すことができる。

   (a) 棒の端を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント

   $$\int_0^L \rho x^2\ dx \quad = \quad \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\rho}{3}L^3 = \frac{ML^2}{3}$$

   Maxima による計算

```
integrate( rho * x^2, x, 0, L );
ratsubst( M, rho * L, %);
```

(b) 棒の中心を通り棒に垂直な軸の周りの慣性モーメント

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho x^2 \, dx \quad = \quad \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\rho}{12} L^3 = \frac{ML^2}{12}$$

Maxima による計算

```
integrate( rho * x^2, x, -L/2, L/2 );
ratsubst( M, rho * L, %);
```

3. 均質な板の慣性モーメント

板の面積を S とする。単位面積の当たりの質量 ρ(これを面密度という) と全質量 M とは次のような関係がある。

$$M \quad = \quad \rho S$$

この関係を用いることで、ρ を用いず M を用いて慣性モーメント I を表すことができることがある。

(a) 長方形 (辺の長さが a と b) の一つの頂点を通り面に垂直な軸の周りの慣性モーメント

$$S \quad = \quad \int_0^a \int_0^b \, dx \; dy = \int_0^a [x]_0^b \; dy = b \int_0^a \; dy = b \, [y]_0^a = ab$$

$$I \quad = \quad \int_0^a \int_0^b \rho(x^2 + y^2) \; dx \; dy = \frac{\rho ab(a^2 + b^2)}{3} = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$$

Maxima による計算

```
integrate( rho * (x^2+y^2), x, 0, b );
integrate( %, y, 0, a );
ratsubst( M, rho * a*b, %);
ratsimp(%);
```

(b) 長方形 (辺の長さが a と b) の中心を通り面に垂直な軸の周りの慣性モーメント

$$I \quad = \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho(x^2 + y^2) \; dx \; dy = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

Maxima による計算

```
integrate( rho * (x^2+y^2), x, -b/2, b/2 );
integrate( %, y, -a/2, a/2 );
ratsubst( M, rho * a*b, %);
ratsimp(%);
```

(c) 円 (半径 r) の中心を通り面に垂直な軸の周りの慣性モーメント

円の面積について

$$S \quad = \quad \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \; dx \; dy = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2} dy = \pi r^2$$

Maxima による計算

```
integrate( 1, x, -abs(sqrt(r^2-y^2)), abs(sqrt(r^2-y^2)));
integrate( %, y, -r, r);
```

慣性モーメントについて

$$I = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \rho(x^2+y^2)\ dx\ dy = \frac{Mr^2}{2}$$

Maxima による計算

```
integrate( rho * (x^2+y^2), x, -abs(sqrt(r^2-y^2)), abs(sqrt(r^2-y^2)));
integrate( %, y, -r, r);
ratsubst( M, %pi * rho * r^2, % );
```

4. 均質な 3 次元物体の慣性モーメント

物体の体積を V とする。単位面積の当たりの質量 ρ(これを密度という) と全質量 M とは次のような関係がある。

$$M = \rho V$$

この関係を用いることで、ρ を用いず M を用いて慣性モーメント I を表すことができることがある。

(a) 球の中心を通る軸の周りの慣性モーメント
半径 r の球の体積について

$$V = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}}\int_{-\sqrt{r^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-z^2-y^2}} dx\ dy\ dz = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Maxima による計算

```
integrate( 1, x, -abs(sqrt(r^2-z^2-y^2)), abs(sqrt(r^2-z^2-y^2)));
integrate( %, y, -abs(sqrt(r^2-z^2)), abs(sqrt(r^2-z^2)));
integrate( %, z, -r, r );
```

慣性モーメントについて

$$I = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}}\int_{-\sqrt{r^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-z^2-y^2}} \rho(x^2+y^2)\ dx\ dy\ dz = \frac{2Mr^2}{5}$$

Maxima による計算

```
integrate( rho * (x^2 + y^2 ), x, -abs(sqrt(r^2-z^2-y^2)), abs(sqrt(r^2-z^2-y^2)));
integrate( %, y, -abs(sqrt(r^2-z^2)), abs(sqrt(r^2-z^2)));
integrate( %, z, -r, r );
ratsubst( M, rho * 4/3 * %pi * r^3, % );
```