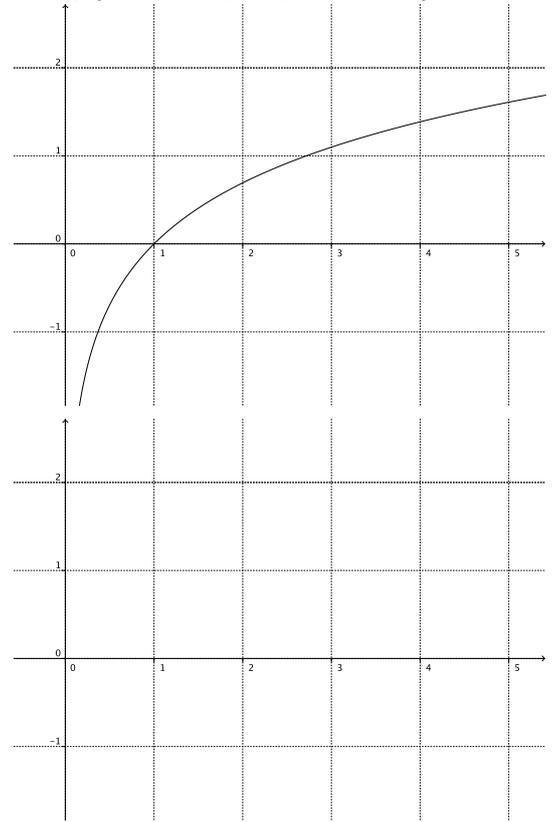
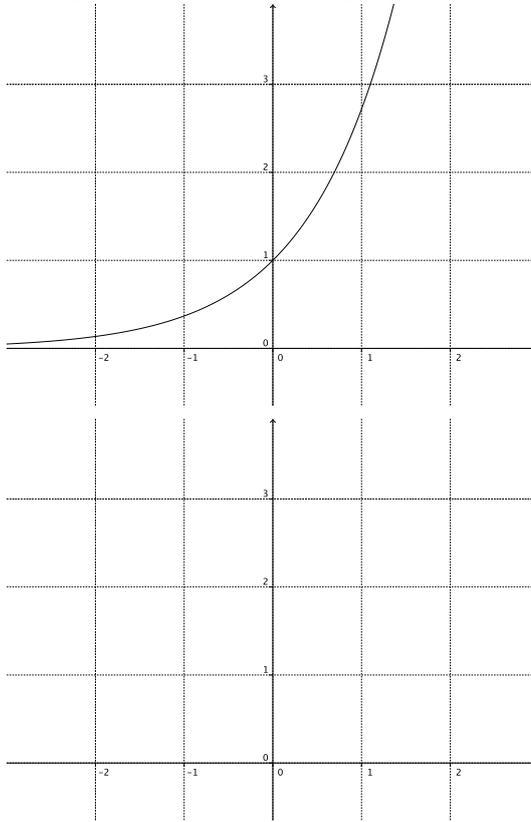


指数関数と対数関数

2017-11-20 森 厚

1 はじめに

次の関数を微分して得られる導関数について考えてみよう。それらを図示しなさい。



2 指数関数の微分法

例えば $f(x) = 10^x$ と表されるような指数部分が独立変数の1次式になっている関数を(多分)指数関数という。これを微分すると、上の例でもわかるように再び指数関数が現れる。うまく調整すれば、微分する前の関数と微分した後の関数を一致させることができそうである。そして、実際できる。それは、次のような関数である。

$$e^x$$

ここで、 e は「自然対数の底」とかネイピア数と呼ばれる数字で、円周率 π と共に数学に現れる代表的な無理数である。
この定義にしたがうと次のようになる。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

なお、 e^x を $\exp(x)$ と書くこともある。

3 対数関数の性質

対数関数はよく現れるが、大学生が最も理解していない高校で学ぶ関数であると思う。しかし、基本は難しくないので丁寧に考えてほしい。

定義 例えば $100 = 10^2$ である。このとき「100は10の何乗だろうか?」という問題を出すことができる(答えはもちろん2)。これを

$$\log_{10} 100 = 2$$

という形で表現することにする。ここで現れた \log が対数関数であり、右下の10を底という。

練習 次の計算をしてみよう。

$$\log_{10} 1000 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\log_{10} 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\log_{10} 0.01 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$10^{\log_{10} 100} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$10^{\log_{10} 3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

逆関数 $y = 3x$ のとき、逆に、 y を一通りに決めれば x が定まる。具体的には、 $x = y/3$ である。つまり、 x は y の関数として書ける。 $y = f(x)$ に対して、 x を y の関数として表したものを逆関数といい $x = f^{-1}(y)$ などと書く。

$y = 10^x$ の逆関数は、 $x = \log_{10} y$ である。

指数法則との関連 指数法則と関連して、対数関数にいくつかの性質がある。例えば、次のような性質である。

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \times 3 \\ &= 10^{\log_{10} 2} \times 10^{\log_{10} 3} \\ &= 10^{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} \end{aligned} \tag{1}$$

$$6 = 10^{\log_{10} 6} \tag{2}$$

両者を比べると、 $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$ とわかる。

底に関する注意 対数関数について、底をいちいち書くのは面倒である。そこで、「普通の底」の場合には底を省略する。ところが、どのように省略するかは、流儀がある。

- 数学の場合
 \log_e を省略して \log と書く。
- 実験物理の場合
 \log_{10} を省略して \log と書く。
 \log_e を省略して \ln と書く。

4 対数関数の微分法

微分法のプリントを参照のこと。

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$