

仕事と運動エネルギー

1 仕事とは

力と変位の内積を仕事 W という。

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{x}$$

ただし、変位が直線に沿っていなかったり、力が場所に变化する場合には、次のような積分で表される。

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

2 仕事と運動エネルギー

2.1 理屈

仕事はエネルギーの変換量であると考えることができる。例えば、運動方程式を考えよう。物体に作用する力 F のする仕事は、運動エネルギーと関係がある。それを以下に簡単に示す。簡単のために、変位と力の向きは一致し、1次元で考えることができるとする。(3次元への拡張はベクトルに慣れれば困難ではない。)

運動方程式から出発し、両辺に(微小な)変位 Δx をかける。

$$F\Delta x = ma\Delta x$$

ここで、若干のトリックを行う。 a と Δx を次のようにみなす。

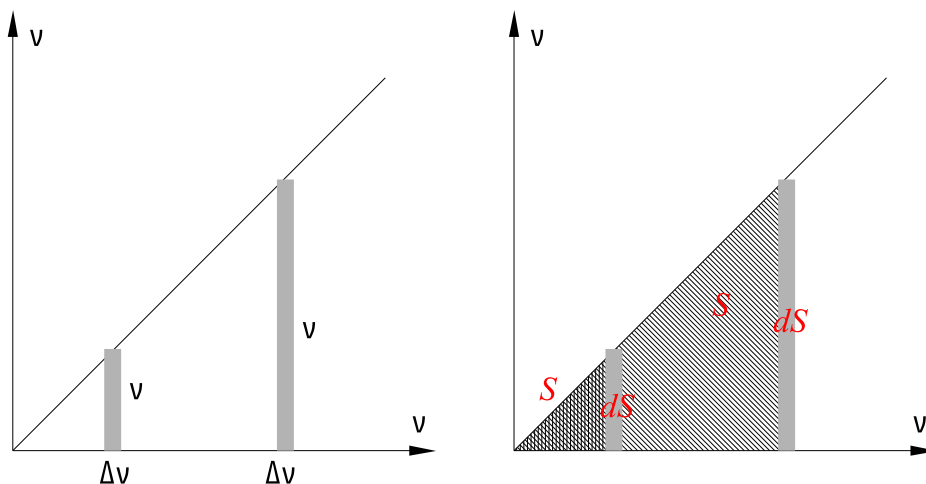
$$a = \frac{dv}{dt} \sim \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \times \Delta t \sim v \times \Delta t$$

すると与式は次のようになる。

$$F\Delta x = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \times v \times \Delta t$$

$$= mv\Delta v$$



ここに現れた $v \times \Delta v$ という量について考えよう。図の左は、縦軸も横軸も v であるようなグラフである。当然、グラフは傾き 1 の直線で表現されている。この時、横軸に Δv をとったとしよう。すると、今考えている $v \times \Delta v$ という量は、図の短冊状の部分の面積になる。

この短冊状の面積の部分は別に解釈することができる(右図)。グラフの下側の三角形の面積を S としたとき、 S が増えた分 dS が短冊状の面積になると考える。三角形の面積は $\frac{1}{2}v^2$ であるから、短冊状の面積は $\Delta \frac{1}{2}v^2$ と書き表される。

これらを総合すると、結局、仕事量は次のように表される。

$$F\Delta x = mv\Delta v = m\Delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

質量 m は定数だから Δ の中に入れた。

2.2 例：力が一定の場合

簡単な例として、1次元の運動で力が一定であるような場合を考える。すると、上の結果から次のようになる。

$$\begin{aligned} F\Delta x &= \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\ F(x-x_0) &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

ここで、ある時刻の位置と速度を x_0, v_0 とし、時間が経過した後の位置と速度を x, v とした。ところで、運動方程式から $F = ma$ であった。そこで、これを代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} ma(x-x_0) &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ 2a(x-x_0) &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

これはテキストに載っていた公式の一つと一致する。

3 まとめ

運動方程式とエネルギー

おそらく、多くの学生の皆さんは、中学校でエネルギーを学んだことであろう。また、高校で運動方程式を勉強したかもしれない。しかし、それらが結びついていることを学んだ人は少ないのではないだろうか。今回の力学の講義のテキストでもこの点についての記述は曖昧になっている。

ところが、このプリントで見てきたように、運動エネルギーは運動方程式と密接な関係がある。運動方程式を介して仕事は運動エネルギーの変化量と結びつくのである。

なぜ仕事やエネルギーを考えるか

このように運動方程式を介して仕事と運動エネルギーが関係している。では、なぜ、仕事や運動エネルギーを考える必要があるのだろうか。余計な物理量を増やして、学生の皆さんを混乱させるだけのために儲けられた物理量なのだろうか。

それは、力学的エネルギーの保存則が関係している。保存量は運動方程式の積分をせずに運動についての情報を提供してくれるので、とても重要だと考えられるのである。