A :

日付: 201　年　　月　　日

氏名: ____________　学籍番号: ____________

直線の傾き

1　直線の傾き

道路標識では、坂の傾きを表すときに比率で表します。つまり、水平方向に 100[m] 進んだときに、高さが 5[m] 増したとしたら、それは 5%($\frac{5}{100} = 0.05$) の傾きとして表されます。同様に、100[m] 水平方向に進んで、高さが 10[m] 増したとしたら、それは 10%($\frac{10}{100} = 0.1$) の傾きです。水平方向の変化量に対する高さ方向の変化量の比率で傾きを表すのです。

数学で考える傾きは、この道路標識と同様に、横軸に沿った変化量に対する縦軸に沿った変化量の比率として傾きを考えます。

図 1 の直線 1 に注目してください。直線に接して 3 つの三角形が描かれています。これらの三角形の斜辺は直線上にあり、残りの 2 辺は x 軸と y 軸にそれぞれ平行です。一番大きな三角形の底辺には $\Delta x = 3$ と書かれています。(Δx は x 軸方向の値の変化を表してます。Δ は変化量 (difference) の d に対応するギリシャ文字です。また、Δx は $\Delta \times x$ ではなく、ひとかたまりとして扱います。) 一番大きな三角形の底辺の x 軸に沿った長さをグラフから読みとると 3 です。そこで、$\Delta x = 3$ と書いてあります。同様に、この三角形の高さ Δy は 6 です。

これらの三角形は互いに相似 (同じ形) です。そこで、一つの三角形について、Δx と Δy の値がわかると、他の三角形についても Δx の値がわかれば、Δy の値もわかってしまいます。それは、これらの三角形が互いに相似なので、Δx と Δy の間には特別な対応関係である比例関係が成り立っているからです。比例関係は次のように書けます。

$$\Delta y \quad = \quad \text{比例係数} \times \Delta x \tag{1}$$

この比例係数はどのように求めたらいいでしょうか。それは、既にわかっている値を代入すれば求められます。一番大きな三角形についての値を代入すると次のようになります。

$$\begin{aligned} 6 &= \text{比例係数} \times 2 \\ \text{比例係数} &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned} \tag{2}$$

式変形では両辺を 2 で割りました。こうして求めた比例係数について考えてみましょう。Δx が 1 であったとすると、$\Delta y = \text{比例係数} \times 1$ となります。そこで「比例係数は Δx が 1 のときの Δy の値」と考えていいでしょう。あるいは、上の式の両辺を Δx で割れば、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = \quad \text{比例係数} \tag{3}$$

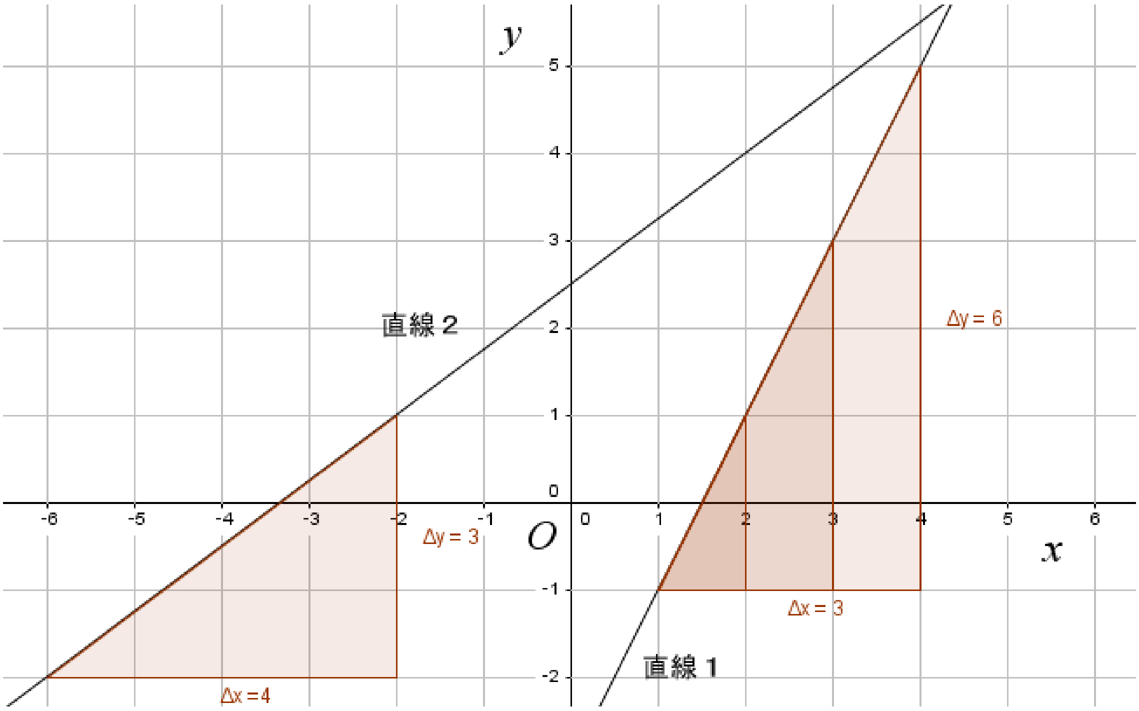

図 1: 傾きの計算方法

となります。割り算には、「1 と思うものを変える」という意味づけができます[1]。これを思い出しながら考えると、ここで現れた比例係数は「横軸に沿った変化量を 1 としたときの縦軸に沿った変化量」であるということができます。このような比例係数が「傾き」です。変化量には正 (増加) と負 (減少) を考えることができるので、傾きも正負を考えることができます。

課題

図 1 の直線 2 の傾きを求めなさい。

ところで、数学では「直線の式」を勉強したのではないでしょうか。直線の式が与えられたときに、それを図示することができる能力は大切です。具体的な値として、$x = 0, 1, 2$ を次の式に代入し、式が表す直線を図 1 描いてみましょう。

課題

- $y = 2x - 1$
- $y = 0.75x - 3$

この作業を実際に行うと、$y = ax + b$ の b を y 切片、a を傾きということがわかると思います。なぜならば、$x = 0$ を代入すると、$y = b$ となり、また、x の値を 1 増やすと、

$$
\begin{aligned}
y_0 &= ax_0 + b \\
y_1 &= a(x_0 + 1) + b = ax_0 + b + a = y_0 + a
\end{aligned}
$$

となって、y の値が a だけ増えるからです。

[1] 2 個のリンゴを、「半分のリンゴを 1 としたとき、何個になるか」を考えると、4 個になります。これは、$2 \div 0.5 = 4$ という計算に対応します。

2　速度

以上は数学で扱う傾きの話でした。では物理学ではどうでしょうか。基本的に違いはありません。ただし、気をつけたいのは、物理学で扱う物理量は単位を伴う (伴っていることが多い) ことです。具体的に図 2(左) で

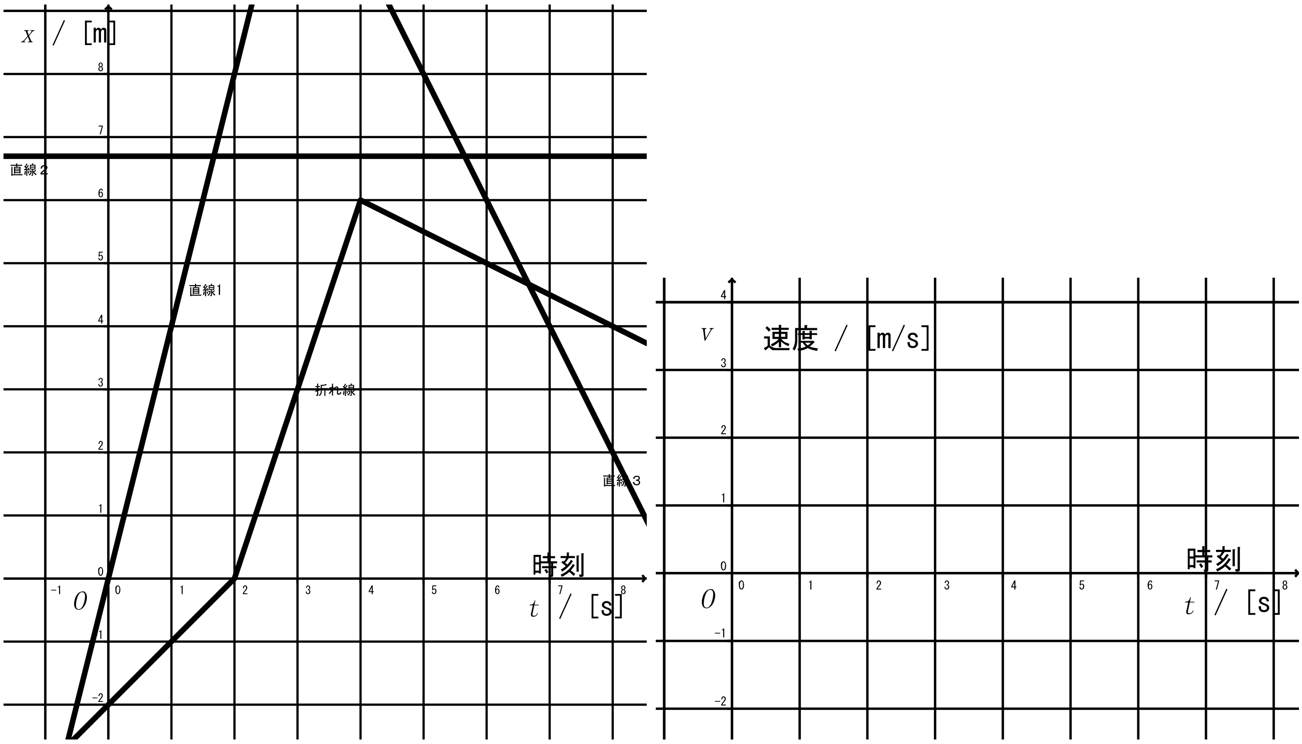

図 2: 左: $x-t$ のグラフ　　右: 左のグラフの傾き（速度）

考えます。これは位置の時間変化のグラフ ($x-t$ のグラフ) です。x は位置を表す座標で、t は時刻 (経過時間) を表します。これらは物理量です。この図の中の直線 1 に注目し、傾きを計算してみましょう。結果は 4 でしょうか。いいえ違います。ここで計算する物理量は単位を伴っていますし、物理学では単位についても計算します。そこで単位を含めて計算すべきです。すると答えは 4[m/s] となることがわかります。

課題

図 2(左) の直線 2、直線 3 の傾きを求めなさい。

このようにして求めた $x-t$ のグラフの傾き が速度です。すると、1[s] あたりの位置の変化量 が速度である、ということができます。物理学では「単位時間」という表現を好みます。そこで 単位時間 (今の場合は 1[s]) あたり の位置の変化量と表現することもあります。これを短く、時間に対する位置の変化率 と表現することもあります。

このプリントで速度についてもう一つ強調しておきたいことがあります。それは速度が時間変化する場合があるということです。図 2 の折れ線がその例です。

課題

図 2 の折れ線から、速度の時間変化のグラフを作成しなさい。また、直線 1, 直線 2, 直線 3 の速度の時間変化のグラフを作成しなさい。

ところが、速度が急に変化することはありえません。例えば、前に進んでいた電車が、一瞬の後に、後ろに進むことがありえるでしょうか。実際にはありえません。そこで、位置の変化も速度の変化もなめらかになります。

例として、次のような位置の変化を考えてみましょう。このグラフでは、傾き（速度）がなめらかに時間し

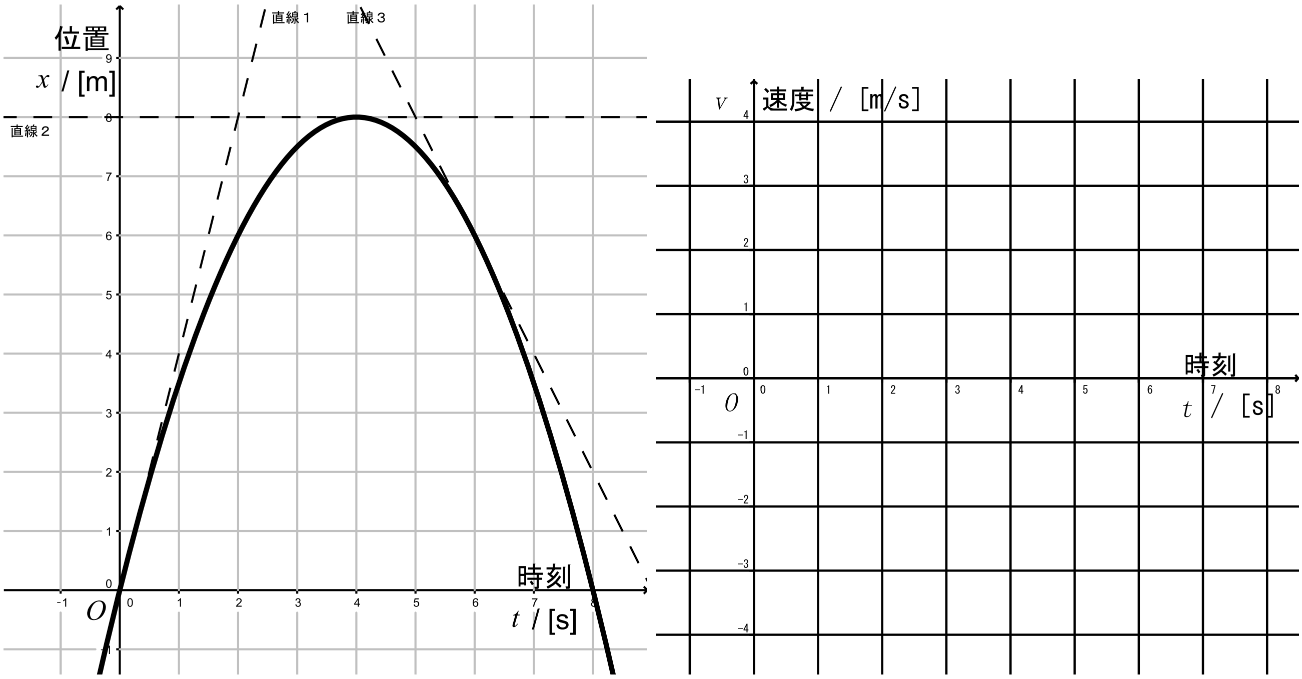

図 3: 左: なめらかに変化するときの $x-t$ のグラフ　　右: 左のグラフの傾き（速度）

ていることがわかります。それでは、このように変化する傾き（速度）に対して、「ある瞬間の速度」をどのように定義したらいいでしょうか。簡単に思いつくように、その時刻に対応した点で $x-t$ のグラフの接線を引いて、その傾きをその時刻の速度とすることです。図 3 の太い実線のグラフでは、$t=0$[s] で直線 1(破線) に接し、$t=4$[s] では直線 2(破線) に接し、$t=6$[s] では直線 3(破線) に接しています。

課題

1. $t=0$[s] での速度を求めなさい。
2. $t=4$[s] での速度を求めなさい。
3. $t=6$[s] 速度を求めなさい。
4. $t=3$[s] での速度を作図に基づいて求めなさい。
5. これまでの結果をもとに、右側のグラフを作成しなさい。

3　加速度

速度が時間的に変化するとき、速度の時間変化のグラフ ($v-t$ のグラフ) を考えることができます。加速度は、位置の時間変化で速度を定義したのと同じように、速度の時間変化で定義されます。$v-t$ のグラフの傾き、単位時間 (今の場合は 1[s]) あたりの速度の変化量 です。

加速度が正の場合、時間と共に速度が増えていくので、初期に速度が正であれば加速することに対応します。このような具体的なイメージと関連付けると、加速度という名称は適切であるように考えられます。

課題

図 3(右) で表された $v-t$ のグラフから、このグラフで表される運動の加速度を図を元に計算しなさい。このとき、単位についても注意しなさい。