つながる物理学桜美林大学 森 厚

はじめに

教養としての物理学

私は桜美林大学で「物理学概論」という科目を担当している教員です。桜美林大学にはリベラルアーツ学群という学群があります。この学群は、幅広い教養としっかりした専門性を身につけることを目的としています。その目的のために、人文科学 (哲学や文学など)、社会科学 (経済学や社会学など) の各専攻の他に、自然科学 (数学や物理学など) の専攻も一つの学群の中に設けられています。一つの専門を深く学べると同時に、別の専門分野も学べるようになっているのです。例えば、物理学と同時に心理学も専攻できます。

物理学概論は物理学専攻を選んだ際には必修となる科目です。しかし、物理学専攻の必修であるばかりではなく、化学、生物学、地球科学などの専攻の選択必修です。中高の理科の教員免許を取得する際には必修です。そして、倫理学専攻など、いわゆる文科系の学生も興味を持って受講しています。

このように位置づけられているので、理学部で行われるような「高校でも物理学を勉強し、物理学専攻を目指すための物理学概論」だけではなく、「教養としての物理学概論」も目指すこととしました。それは、文系の学生にも、物理学の基本的な考え方がしっかりと伝わるような物理学にするということです。特に数学を得意としない文系の学生にも教えることは難しい課題です。この講義ではそれに挑戦しています。

より深く考える材料としての物理学

一方で、高校で既に物理学を十分に履修している学生もいます。そこで、高校で勉強するような物理学とは、なるべく異なった方向からアプローチしてみることを心がけました。教える方としては幸いなことに (ただし、社会全体としては大変不幸なことに)、高校の物理学は、今では暗記科目と捉えられているようです。これは、「物理学は難しい」と敬遠されるために、大学入学試験で問題を簡単にした結果、パターンを暗記していれば得点できるような問題が増えたからではないかと私は想像しています。

これは高校の物理学についてだけではなく、一般的な教育の傾向かもしれません。というのも、学校教育では、学習内容を踏まえて幅広く考えることを避けているように思われるからです。そのように思う根拠は、例えば空気の温度です。皆さんは、暖かい空気は冷たい空気よりも軽いので上がっていくことを知っていると思います。一方で、高い山に登るほど気温が低いので、上空ほど空気の温度が低いことも知っているでしょう。この二つの事実はどのように折り合いをつけることができるでしょうか。この疑問は自然な疑問だと私は思います。深く考えるためのいい材料です。しかし、学校教育では「かえって混乱するから」という理由で、あえて「気づかなかったことにする」という態度がとられているように思えてなりません。考えるチャンスを失うことはとても残念なことです。

また、人間が人間らしい活動を行うためには考えることが必要です。文系を専門とする人も、様々な対象をいろいろな側面から考えて、自分なりの発見ができるような能力を、物理学を通じて身につけて欲しいです。

そこで、この講義では、より多くの考えるチャンスを与えるように努めました。様々な視点から物事を考えることは理解を深め、幅を広げることに適切だからです。そしてより専門的に物理学を学ぶ前に、その準備として深く考える習慣をつけることはとても大切であると考えています。

本書の特徴

本書は数年間にわたって試行錯誤を繰り返しながら行った講義を基にかかれたものです。これまで述べたような観点も含めて、本書で心がけたことを改めてまとめてみたいと思います。

1. 物理学に親しむこと

   物理学を学ぶために必要ないくつかの基本的な知識は、やはり必要です。そこで、物理学でよく用いられる言葉 (用語の定義や法則も含む) に慣れ親しむことができるようにします。

   その際、高校までの物理学の印象が悪いことを前提に、「ゼロから教える」というよりも「マイナスから教えている」という意識で書いてみました。

2. 物理学的な考え方を身につけること

   しかし、覚えることだけが物理学を学ぶ上で大切なのではありません。もっとも重要なのは、物理学的な考え方を身につけることです。どのような考え方で物理学の法則や決まりごとができているのか、できるだけ書きたいと思います。新たな疑問点が発生するような場合には、目をそらさず、できるだけスポットライトを当てていきたいと思います。全体の分量が限られていますから、本質的と考えられるようなところや理解しにくいと考えられるところを特に重点的に扱います。

   考える練習として、章末にはいくつかの課題を掲載しました。巻末には略解を示しています。

3. 数学についても紹介すること

   物理学の発達は数学と無縁ではありません。物理学を学ぶ上で必要な数学についても紹介していきたいと思います。外国語は二ヶ国語を同時に学ぶと学習効率が高いと言われています。物理学と数学も同様の関係があると思います。物理学を学ぶことで数学の理解が深まりますし、数学を学ぶことで物理学の理解が深まります。

4. 全体の構成とつながり

   高校までの物理学の勉強では、力学と電磁気学は全く別の学問であると考えがちです。また、なぜ面倒な単位について細かく考えなければならないのか、などと思いがちです。そして、一通り学習すると、それ以上勉強することがないような気もするかもしれません。

   この教科書は、いろいろなつながりを意識して作りました。数学や単位が、どのように運動方程式につながるのか、力学と電磁気学はどのようにつながるのか、また、将来勉強する物理学と高校までの物理学はどうつながるのか。読み手側の皆さんもこのような点を意識してほしいと思います。

私の専門が物理学の本道ではなく、地球流体力学 (大気や海洋の流体力学) であることは、旧来からの入門的な物理学とは、やや違った角度から物理学を教えるのにいい立場であるように思います。学生の皆さんに役立つテキストであるといいと思っています。

学びの Tips：なぜ物理学は難しいか？

「物理学は難しい」という感想をよく聞きます。これにはいくつかの理由があるように思いますし、それぞれには対策があります。

- 先入観

  残念ながら人間は先入観から自由になることは難しいです。そして、中学や高校で様々な法則を叩き込まれ、計算ばかりやらされると、誰でも悪い先入観を持ちます。

  本書の範囲では、そうした物理学とは別物だと思ってもらえたらと考えています。暗記や計算よりも考える習慣を身につけていきましょう。

- 積み上げ

  難しいと思うと、勉強しなくなって、ますます追いつけなくなったことがありませんか。

  物理学は積み上げが重要です。これは逆に、基本を理解しておけばよいということです。その中でも基本であるのは**運動方程式**です。この本の前半は運動方程式のために書いてあります。運動方程式の理解に集中しましょう。

- 数式に慣れていない

  もう一つは数学です。高校まででアレルギーになってしまった人も多いと思います。しかし「数学が苦手」という場合の代表的なパターンは、1) 等式の変形がうまくできない　2) 代入ができない　の 2 通りです。

  小学校のときに字を書く練習をしたように、これらは練習によってできるようになるものです。自分は何が苦手なのかを意識して、その上で練習してみるといいでしょう。

- 数学用語を覚えていない

  学習に身が入らないと、覚えるべきことも覚えられません。物理学や数学の専門用語を知らなければ、英単語を知らずに英語を理解しようとするのと同じような困難に直面します。

  この対策は簡単です。英単語を覚えるように、専門用語を覚えましょう。巻末にはそのために索引をつけました。

特殊な人しか理解できないようなものは科学ではありません。物理学もそうです。恐れずにチャレンジしてください。

目 次

囲み記事

— 法則 —

— 考えてみよう —

— 学びの Tips —

— こぼれ話 —

第1章　物理学とは

1.1　物理学の考え方

まず始めに、これから物理学を学んでいくに際して、物理学とは何かを考えてみましょう。なぜこのような話題からスタートするかというと、一つには、物理学を含む自然科学 (あるいはあらゆる学問全般) は、定義を重んじるからです。学問のなかで、議論をすることはとても大切です。しかし、あるテーマについて議論しているのに、考えている対象が人によって異なっていては、まともな議論はできません。そのため、ある単語が何をさしているのか、あらかじめ明確にして、同じ認識を共有する必要があります。「物理学とは何か」を考えるのは、その練習でもあります。

もう一つは、高校の物理学の視野があまりに狭いので、改めて考える必要があると思うからです。高校で学習した物理学は、物理学には違いありません。ただ、内容はかなり限定的で、これまでの物理学の長い歴史の中で、既に研究しつくされたことをなぞることが中心です。もちろん、それは大切なことです。過去に調べられたものを知識として吸収しておくことは、新しい対象を考えるときの道しるべにもなります。しかし、それが全てだと錯覚してしまうのは危険です。これは、私自身が大学で勉強し、研究活動を行った上での感想であり、更に、本学で教えるに当たって、改めて高校の物理学を見直した上での感想でもあります。

さて、それでは物理学をどのように考えたらいいでしょうか。日本の物理学者で多くの功績を残した**朝永振一郎**[1]は、「物理学とは何だろうか」[2]の中で、定義するのは難しいとしながらも、次のように述べています。

> われわれを取り囲む自然界に生起するもろもろの現象ーただし主として無生物にかんするものーの奥に存在する法則を、観察事実に拠りどころをもとめつつ追求すること

このような認識は、私は現在でも変わらないと思います。つまり、まず、物理学を定義することは難しいです。そして、この言葉が示しているように、物理学は、対象そのものではなく、対象の間の関係性や、その奥にある法則性を追求するところに特徴があるのです。更に注目したいのは、「観察事実によりどころをもとめつつ」という部分です。これは実験も含むと考えられます。観察や実験を通して明らかにしていく方法も物理学の特徴です。物理学を、対象を限定しない方法論として考えるならば、様々な学問分野に適用できるはずです。そして、物理学の方法論を様々な分野に適用しようという試みは沢山行われています。

物理学の特徴は方法論にある、という認識が、高校までの教育に欠けているように思われるのは大変残念です。

こぼれ話：高校の教科書に載っていない物理学の研究例

それでは「もろもろの現象の奥に存在する法則」とはどのようなものでしょうか。この言葉にもいろいろな側面があると思います。

例えば私の知っている研究者は、水槽の下から細かな泡が出てきた場合に、どのような水の流れができるかを研究しました。このような泡の対流は、大気中の温かい空気が沢山の塊のようになって対流する様子を簡単化したものです。それを見たイギリスの別の研究者は、「水面に上がっていこうとする性質を持った水中の微生物の集団的な動きを研究している。その微生物が水面近くに集まると、その部分が重くなって下降流が起こる。その様子はあなたの実験とよく似ている。」と言ったそうです。また、別の研究者は「地球内部の外核 (液体核) の部分では、鉄が冷えて固体となり、それが下降して内核 (固体の核) に沈んでいく。それに伴う対流は泡の対流によく似ている。」と言いました。

この例が示すことは、別々だと思われていた現象の本質的な部分について、共通して説明することができる部分がある、ということです。そう考えて、その本質的な部分の法則性を探っていくことも典型的な物理学の研究例と言えるでしょう。

[1] 朝永振一郎博士は日本で二番目にノーベル賞 (ノーベル物理学賞) を受賞した研究者としても知られています。
[2] 岩波新書

1.2　物理学の分野

ここまで述べたように、物理学は、その考え方に特徴があります。ところが、高校までの物理学や、既存の物理学の教科書に書いてあるのは、これまでの物理学で得られた成果が中心です。それは、一つには、物理学の考え方を学ぶためには、これまでの学問の歴史を知っておくことが重要だからです。また、私達の生活で用いる様々な技術が、こうした過去の物理学の研究の上に成り立っているからでもあります。いずれにしても、過去の研究の成果を知らないことはもったいないことです。そこで、この本では、物理学の考え方を大切にしながらも、過去の物理学の成果の一部について学んでいくことにします。

これまでの物理学が、どのような分野に分類できるかを挙げてみましょう。

1. **力学**
   物体に作用する力と運動についての物理学を**力学**といいます。物理学の中で最も早い時期に研究が進みました。

2. **電磁気学**
   電気と磁気についての物理学を**電磁気学**といいます。更に、この学問分野は二つに大別されます。一つは、時間的に変化しない場合の電磁気学です。**電荷**間に作用する**静電気**による力や**電場**の話題、磁石によるや**磁場**についての話題、そして、**直流**の**電流**や電流の周りにできる磁場に関する話題が該当します。

   もう一つは、時間変化する場合の電磁気学です。このとき、電気と磁気の間の相互作用が重要になってきます。すなわち、電流は**磁場**を作りますし、磁場の時間変動は**起電力**を作ります。このような現象は、わたしたちが日常利用している**交流**の電気と深い関係があります。

3. **熱力学・統計力学**
   物質の**温度・圧力・体積**の間にはある関係が成り立っています。また、熱を加えたときの温度の上昇のし方は物質によって決まっています。これらの関係を使うことで、物質のいろいろな性質 (例えば、水の**蒸発熱**の温度変化の性質など) が分かります。こうした話題を扱うのが**熱力学**です。

   こうした関係は、物質が非常に数多くの**分子**で構成されていること、また、その分子が乱雑に運動していることを前提として理解することができます。このように小さな (ミクロな) 構成要素が数多く集まることで大きな (マクロな) 現象を理解しようとするのが**統計力学**と呼ばれる学問です。

4. **量子力学**
   力学や電磁気学は私達の身の回りの現象や、天体の運動を考える上でとてもよく機能しました。ところが、20 世紀初頭までには、非常に小さい現象の場合には、それまでの力学 (**古典力学**) ではうまく説明できない現象があることが分かってきました。

   原子程度よりも小さな現象を扱う場合には、別の枠組を考える必要があります。そのようにして生まれた物理学を**量子力学**といいます。量子力学の世界では、粒子だと考えていた**電子**を波として考える必要があったり、逆に波だと考えられていた光を粒子として考える必要があったり、また、原理的に複数の物理量を同時に観測できなかったりと、一般の常識とはかけ離れた世界を扱うことになります。

5. **相対性理論**
   一方、非常に高速で運動する物体の場合にも不思議なことが起こります。例えば、高速で運動する宇宙船の中では、地上にいる人からみると、時間がゆっくり進みます。そのような意味では、宇宙船に乗っている人は長生きするように見える訳です。このような現象を扱う物理学を**相対性理論**といいます。

   相対性理論の特徴の一つは、いろいろな現象が理論的に予想され、その後に実験や観察で確かめられたことです。上に書いた時間の進み具合についてもそうでした。そのような意味で、とても興味深い学問分野です。

ここでもう一度強調しておきますが、こうした分野への分類は、これまでの物理学の成果に基づいています。物理学の特徴は、その考え方にありますので、これらの枠に入らない、全く新しい物理学がこれからも誕生していくでしょう。実際、これまでの物理学の枠組を越えた複雑系科学などと呼ばれる研究はどんどん進展しています。これまでの物理学の成果をたどることは、新しい更にその先の物理学を切り開くための準備であると考えほしいと思います。

課題　1. 哲学、文学、文化人類学、心理学といった科目は高校の授業科目名にはありません。これらの学問について、その定義を調べてみましょう。例えば、何を哲学というのでしょうか。

第2章　量と単位

2.1　物理量と単位

前章で述べたように、定義を明確にすることは大切です。ここでは物理学で扱う量 (**物理量**といいます) について考えます。

ある物理学的な対象を言葉で表現して人に伝える場合に、**定性的**な表現と、**定量的**な表現とがあります。前者は数値を用いずに表すもので、後者は数値で表すものです。例えば、**速さ**を表すことを考えましょう。定性的に「速い」「遅い」といった表現で速さを表すことも可能です。また、定量的に「時速 30km」と、数値で表すことも可能です。物理学では、定量的に物理量で表現することが圧倒的に多いです。もちろん、物理学でも「大きい」「小さい」というように定性的な比較の表現を用います。しかし、そのような場合には、必ず「○○よりも大きい」というように比較の対象を指定して (または想定して) います。

また、物理量は、誰が測っても同じになる量、すなわち、客観な量です。そして、物理量は数値と**単位**で構成されます。例えば、「時速 30km」あるいは「毎時 (まいじ)30km」というのは、「30」という数値と「km/時」(キロメートル毎時、あるいは、時間を hour の頭文字 h で表し、km/h としてキロメートル・パー・アワー) という単位で構成されます。物理量から計算されるものも、また、物理量です。例えば、辺の長さが 2[m] と 5[m] の長方形の面積は、測定された辺の長さ 2[m] と 5[m] を用いて、$2[\mathrm{m}]\times 5[\mathrm{m}] = 10[\mathrm{m}^2]$ として表されます。後で学習する**エネルギー**は、直接測定することはできません。温度計のようなエネルギー計は (アニメなどを除いて実物を) 見たことがありません。エネルギーも他の物理量を組み合わせて計算する物理量なのです。

単位について簡単に説明しましょう。例えば、2[m] は、1[m] の 2 倍の長さを表しています $(2[\mathrm{m}] = 2 \times 1[\mathrm{m}])$。3.5[m] は、同様に、1[m] の 3.5 倍の長さを表しています $(3.5[\mathrm{m}] = 3.5 \times 1[\mathrm{m}])$。このように、何かの量を単位を用いて表した場合、その単位の前に “1” をつけた量の何倍であるかを意味しています。その単位の前に “1” をつけた量を基準にして、何倍の値であるかを表したものが単位の前の数値という訳です。そこで、物理量は “数値” × “単位” という形で表されていると考えるべきです。なお、単位の前に “1” をつけた量には、特別な呼び名を使うことがあります。例えば長さの場合にはこれを**単位長さ**と表現します。具体的には 1[m]、1[cm] などです。**単位時間**なども同様で、具体的には 1[s]（s は秒)、1[h] などです。

単位について補足しておきたいことが二つあります。一つ目は、単位の計算についてです。さきほど、長方形の面積を $2[\mathrm{m}]\times 5[\mathrm{m}] = 10[\mathrm{m}^2]$ と計算しました。この例に見られるように、物理量の演算を行う際には、数値についてだけでなく、単位についても同じように演算することになります。これは物理量が数値×単位であると考えれば自然なことです。

もう一つは単位の書き方についてです。掛け算を勝手に省略することは許されませんから、計算式の中でも、必ず数値と単位を両方しっかり書くようにしましょう。単位は数字の後ろに続けて書くことがルールです。この本では、文字式と単位を明確に区別するために、単位は [ ] で囲んで書くことにします。しかし、必ずしも [ ] で囲む必要はなく、むしろ囲まないのが正しい書き方です。ただし、特に印刷物では工夫をします。同じ “m” でも、物理量（例えば質量）を表す文字の場合には斜体 m で表され、単位（メートル）の場合には立体 (斜めになっていない文字) m で表されます。

2.2　単位系

速さとは何でしょうか。やや難しい言い方をすると、「**単位時間**（1[s] とか 1[h]）当たりの進む距離」が速さです。

これをふまえて、速さの単位について考えてみましょう。速さの定義に基づいて単位を考えると、速さの単位は距離の単位を時間の単位で割ったものになります。例えば、[m/s] とか [km/h] といった具合です。速さの単位が距離と時間の単位を組み合わせて作られているように、別の単位から組み合わせて作られる単位があります。そのような単位を**組み立て単位**といいます。一方、組み立て単位に用いるような、基本的な単位を**基本単位**といいます。

では、どのような単位が基本単位でしょうか。どのような単位を基本単位と選ぶかは、流儀によって異なります。しかし、現代の物理学では、**国際単位系** (**SI**, フランス語 Le Système International d'Unités の略) を用いることになっています。SI では次の七つの単位を基本単位としています。

長さ距離	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (セコンド あるいは セカンド)
電流	A	**アンペア**
温度	K	**ケルビン**
物質量	mol	**モル**
光度	cd	**カンデラ**

その他の単位は組み立て単位として表します。例えば、面積は [m^2] (平方メートル) です。密度は、単位体積あたりの質量ですから、[kg / m^3] (キログラム毎立方メートル) です。

物理学のほとんどの教科書は SI を採用していますし、これを使うことは今や常識です。そこで、この本でも SI を用います。ただし、SI 以外にも単位系がありますので、それについて簡単に触れておきましょう。

MKSA 単位系	**CGS 単位系**
長さ距離　m　メートル 質量　kg　キログラム 時間　s　秒 電流　A　アンペア	長さ距離　cm　センチメートル 質量　g　グラム 時間　s　秒
これらの基本単位の頭文字をとって MKSA 単位系と名づけられています。基本単位は SI と共通で、 SI の前身となった単位系です。	これらの基本単位の頭文字をとって CGS 単位系と名づけられています。歴史が長く、また小型の実験装置を考える場合に適しているので、今でも利用している物理学者がいます。

これで用いる単位は決まりました。しかし、このような単位だけでは扱いが難しいことも多々あります。例えば、地球規模の現象を考えてみましょう。地球一周の大きさは、およそ 40000000m です。ゼロが多くて扱いが大変です。そこで、次のような **SI の接頭辞**を用いることが多いです[1]。

接頭辞	読み方	表す量	指数を用いた表示 (2.3 節参照)
E	**エクサ**	1000000000000000000	10^{18}
P	**ペタ**	1000000000000000	10^{15}
T	**テラ**	1000000000000	10^{12}
G	**ギガ**	1000000000	10^{9}
M	**メガ**	1000000	10^{6}
k	**キロ**	1000	10^{3}
h	**ヘクト**	100	10^{2}
da	**デカ**	10	10^{1}
d	**デシ**	0.1	10^{-1}
c	**センチ**	0.01	10^{-2}
m	**ミリ**	0.001	10^{-3}
µ	**マイクロ**	0.000001	10^{-6}
n	**ナノ**	0.000000001	10^{-9}
p	**ピコ**	0.000000000001	10^{-12}
f	**フェムト**	0.000000000000001	10^{-15}
a	**アト**	0.000000000000000001	10^{-18}

例えば、2[km] は 2000[m] のことです。k は 1000 を意味するので、2[km] $= 2 \times 1000 \times 1$[m] と考えていいでしょう。5[cm] は c が 0.01 なので $5 \times 0.01 \times 1$[m] $= 0.05$[m] となります。ただし、習慣によってよく使う場合とあまり使わない場合があります。先ほどの例に挙げた地球 1 周の長さは、40[Mm] ですが、このような表現はあまりしません。40,000 [km] ということの方が多いです。

こぼれ話：地球の大きさ

「地球の大きさは、なぜ 1 周 4 万 km なのでしょうか。」という質問に皆さんはどのように答えるでしょうか。

[1] この表以外に、1991 年に 4 つ、2022 年にも 4 つ、追加されています。

ここで、「なぜ」という言葉にはいろいろな意味合いがあるので注意が必要です。物理学的な因果関係の原因を指す場合もあります。また、過去の経緯を聞いている場合もあります。そこで、このようにいろいろな解釈ができる質問は不親切です。それでも、あえてこのような質問をしたのは、実は興味深い経緯があるからです。

長さの基準を決めることは、昔から様々な必要性があって行われてました。ところが、ある特定の国の習慣に他の国が追従することは心理的に抵抗があると想像されます。そうした背景が、おそらくはあって、現在使われている長さの単位 [m] は、もともとは地球のサイズを基準として定められました。赤道から北極点までの距離が丁度 1 万 km になるように定められたのです。

現在では、より正確にメートルを決めることができるように、光の速さを利用して 1[m] の長さが定義されています。しかし、過去にこうした経緯があるために、地球 1 周の長さは、おおよそ 4 万 km になるのです。

物理量には、正確に表現すると単位が無いものもあります。例えば、角度を表現するときの**弧度法**です。角度を表すには、0 度〜360 度まで「度」を用いて表す**六十分法**もあります。しかし物理学ではあまり使われません[2]。弧度法では半径 1 の円周を考え、考えている角を中心角としたときの弧の長さ (0〜2π の範囲、ただし π は円周の長さと直径の比として定義される円周率で 3.141592653589⋯) でその角の大きさを表します (図 2.1)。この定義からして、弧度法で表されるものは弧の長さと半径との比ですから、本来は単位が無い物理量です。しかし、弧度法で表した角度であることを明確にするときには、単位**ラジアン**をつけることが習慣となっています。

もう一つ、注意すべき例を挙げます。1 秒間に何回振動するかを**振動数**といいます。これを表す単位には [Hz] (**ヘルツ**) を用います。例えば、私たちが日常使っている交流電源は、東日本の場合、1 秒間に 50 回振動しますから、50 Hz と表現します。1 秒間に何回振動したかを表すのですから、単位としては回/s が適切であるように思われます。しかし、この「回」のように、指で数えられるような性質のものには単位をつけません。回数を数えただけのようなものは、物理量の単位としないのです。そこで振動数の単位は [1/s] です。振動数の単位 [Hz] を [1/s] の別名として用いるのは、他の [1/s] を単位とする物理量（例えば**放射能**の単位 [Bq](**ベクレル**), p.86）と区別するためです。

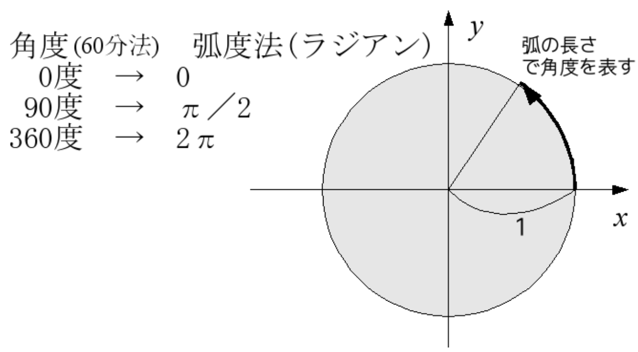


図 2.1: 弧度法について

これらの例のように、やや性質の異なる単位もあるので注意が必要です。

学びの Tips：木の下のハゲジジイ？

学生にインタビューしたところ、「**キ**ティーちゃんが恥 (**ハジ**) かいた」「木 (**キ**) の下の**ハ**ゲ**ジ**ジイ」「**ハジキ**の法則」「**ミハジ**の法則」など、様々な回答が返ってきました。みなさんは何のことだか分かりますか。

これらは、移動した距離と速さと経過時間の関係を表したものです。キではなくミを用いる場合には、直線距離ではないので、道のりと表現すべきだ、との意見からミになったようです。

$$\frac{\textbf{キ}\text{ョリ}}{\textbf{ハ}\text{ヤサ} \times \textbf{ジ}\text{カン}} = 1$$

これらを使って覚えやすくなったのだとしたら、それはいいことです。しかし、物理学は暗記科目ではありません。速さの定義が分かったならば、感覚としてこれらの関係を理解しておきたいものです。例えば、一定の距離を進むための経過時間が短いことを "速い" といい、それを表現するために、「距離÷経過時間」を速さと名づけています。

数式が現れたら、それを直感的に理解する練習をしておきましょう。

学びの Tips：比例と反比例

[2] しかし、地球科学や宇宙科学の分野ではよく使われますので、覚えておくと便利です。60 分法では、1 度 (1 °) を 60 分割して 1 分 (1')、1 分を 60 分割して 1 秒 (1") とし、こうした単位も用いられています。

ある量 x の値が 2 倍になったとき、y の値も 2 倍になるような関係があれば、y は x に**比例**するといいます。y が x に比例する (これを $y \propto x$ のように書き表します。) 場合には、$y = ax$(a はゼロでない定数) と書き表されます。逆に、このような式で表される場合には、y は x に比例します。a を**比例定数**といいます。

ある量 x の値が 2 倍になったとき、y の値が半分 (1/2 倍) になるような関係があれば、y は x に**反比例**するといいます。y が x に反比例する場合には、$y \propto \frac{1}{x}$ あるいは、$y = \frac{a}{x}$(a はゼロでない定数) と書き表されます。逆に、このような式で表される場合には、y は x に反比例します。

比例も反比例も中学校で学びます。ところが、その重要性は物理学を学ぶまで実感できないかもしれません。ここでもう一度、その性質を思い出してみましょう。

学びの Tips：物理法則と比例

これからいくつかの物理量の定義や物理法則を勉強することになります。そのときにぜひ気をつけてほしいことがあります。それは、多くの場合、掛け算や割り算で表されているということです。別の言葉で表現すれば、物理量の定義や物理法則は、比例関係であるということです。

物体が一定の**速さ**で運動することを例に考えましょう。移動距離と経過時間は比例します。経過時間が長ければ、それに応じて移動距離が長くなります。

$$\text{移動距離} \quad \propto \quad \text{経過時間}$$

比例定数を用いることで、両者を等式で結ぶことができます。

$$\text{移動距離} \quad = \quad \text{比例定数} \times \text{経過時間}$$

この比例定数 (あるいは比例係数) が速さです。比例関係に基づいて、速さが定義できるのです。

$$\text{移動距離} \quad = \quad \text{速さ} \times \text{経過時間}$$

この式は、速さの定義であるだけでなく、同じ経過時間ならば、移動距離と速さが比例することも、同じ移動距離ならば、経過時間と速さが反比例することも表しています。

これから学ぶ物理量の定義や物理法則について、比例関係を意識しましょう。定義や法則を理解しやすくなります。

2.3　指数法則

物理量には、時々、たくさんのゼロ (0) が出てきます。そこで、SI の接頭辞を用いるのでした。しかし、別の方法もあります。例えば、1000 を短く 10^3 と書きます。数字の右肩に書く数字を**指数**といいます。指数は、同じ数を何度掛け合わせるかを表す数字です。例えば、先ほどの場合の 10^3 では、指数は 3 ですから、10 を 3 回かけあわせた $10 \times 10 \times 10$ を意味します。この値は 1000 であり、指数はゼロの数と一致することが分かります。これは便利です。なお、例えば 5^3 というものもあります。これも同様に、$5 \times 5 \times 5$ を意味します。この場合は、ゼロの数と関係ありません。

沢山のゼロが出てくるような数値の計算では、ゼロの数を数えなければならず、とても大変です。ところが、指数には、これから説明するような規則 (**指数法則**) があるために、計算がとても楽になります。

1. $A^p A^q = A^{p+q}$　(例：$10^2 \times 10^3 = 10^5$)

   A を p 回掛け合わせたものと、A を q 回掛け合わせたものとを掛け合わせると、合計で、$p+q$ 回掛け合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

$$\overbrace{A \cdots A}^{p\text{ 個}} \times \overbrace{A \cdots A}^{q\text{ 個}} = \overbrace{A \cdots A}^{p+q\text{ 個}}$$

2. $(A^p)^q = A^{pq}$　(例：$(10^2)^3 = 10^6$)

A を p 回掛け合わせたもの全体をひとかたまりとして、それを q 回掛け合わせたものは、A を $pq = p \times q$ 回掛け合わせたものです。ここまでの二つの性質が基本的な性質です。

$$\overbrace{(A^p)\cdots(A^p)}^{q\text{ 個}} = \overbrace{A\cdots A}^{pq\text{ 個}}$$

3. $(AB)^p = A^pB^p$　(例：$(2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3$)

   A と B の積全体をひとかたまりとして、それを p 回掛け合わせたものは、A を p 回掛け合わせたものと B を p 回掛け合わせたものの積です。

$$\overbrace{(AB)\cdots(AB)}^{p\text{ 個}} = \overbrace{A\cdots A}^{p\text{ 個}}\overbrace{B\cdots B}^{p\text{ 個}}$$

4. $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$　(例：$10^5 \div 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$)

   A を p 回掛け合わせたものを、A を q 回掛け合わせたもので割ると、合計で、$p-q$ 回掛け合わせたことになります。そこで、このような法則が成り立ちます。

$$\overbrace{A\cdots A}^{p\text{ 個}} \div \overbrace{A\cdots A}^{q\text{ 個}} = \overbrace{A\cdots A}^{p-q\text{ 個}}$$

5. $A^0 = 1$　(例：$\frac{10^2}{10^2} = 10^{2-2} = 10^0 = 1$)

   上の法則で $p = q$ の場合、$\frac{A^p}{A^p} = A^{p-p} = A^0$ となります。ところがこれは 1 です。そこで、$A^0 = 1$ と決めておくと都合がいいです。

6. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$　(例：$\frac{10^0}{10^2} = 10^{0-2} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$)

   $\frac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$ で、$p = 0$ とすると、$\frac{1}{A^q} = A^{-q}$ となります。そこで、このように定義すると都合がいいです。

7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$　(例：$(\sqrt{100})^2 = 100$ と $(100^{\frac{1}{2}})^2 = 100^{\frac{2}{2}} = 100^1 = 100 \quad\rightarrow\quad 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100}$)

   平方根 $\sqrt{A}$ について、$(\sqrt{A})^2 = A$ です。また、$(A^{\frac{1}{2}})^2 = A^1 = A$ ですから、$\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$ とすると好都合です。同様に、**立方根** $\sqrt[3]{A}$ は、$(\sqrt[3]{A})^3 = A$ ですから、$\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$ です。

SI の接頭辞をまとめた表 (p.8) には指数による表示も書いてありますので見直してください。このような指数法則を使うと、特にゼロが多い場合の計算はとても簡単になります。

2.4 単位の換算

いろいろな単位が現れると混乱しがちです。そこで、単位の換算についてはスムースにできるようにしておきましょう。

SI の接頭辞についての例

SI の接頭辞については、p.8 の表に従って考えればいいと思います。SI の接頭辞を、そのまま指数による表示の数に置き換えて下さい。例えば次のように考えます。

$$\begin{aligned} 10[\mathrm{nm}] &= 10 \times [10^{-9}\mathrm{m}] = 10 \times 10^{-9}[\mathrm{m}] = 10^{-8}[\mathrm{m}] \\ 3 \times 10^5[\mathrm{m}] &= 3 \times 10^2 \times 10^3[\mathrm{m}] = 3 \times 10^2[\mathrm{km}] \end{aligned}$$

これらの例は、n を 10^{-9} に、10^3 を k に置き換えたことに気をつければいいだけです。簡単ですね。

この考え方は次のような例にも応用できます。ただし、cm^3(立方センチメートル) が、cm × cm × cm であることに気をつけましょう。

$$10^6[\mathrm{cm}^3] = 10^6[(10^{-2}\mathrm{m})^3] = 10^6 \times 10^{-6}[\mathrm{m}^3] = 1[\mathrm{m}^3]$$

逆に、次のような計算もできます。

$$1[\mathrm{m}^3] = 1[(10^2 \times 10^{-2}\mathrm{m})^3] = 1[10^6 \times (10^{-2}\mathrm{m})^3] = 10^6[\mathrm{cm}^3]$$

より複雑な例

例えば、水の**密度**を考えてみましょう。密度は単位体積 (例えば 1[cm^3] とか 1[m^3]) 当たりの**質量**として定義されます。まだ慣れていないかもしれませんので、もう少し詳しく書いてみます。水の質量は、水の体積に比例します。体積が 2 倍になれば、質量も 2 倍になります。そのときの**比例定数**が密度です。

$$\text{水の質量} \quad = \quad \text{水の密度} \times \text{水の体積}$$

このような関係ですから、水の密度の単位は、[kg/m^3] とか [g/cm^3] とかになります。おそらく、皆さんの中には、「水の場合、体積 1[L](**リットル**, 「こぼれ話：体積の単位『リットル』」参照) て**質量**はおおよそ 1[kg] である」ということを知っている人が多いでしょう。そこで、水の密度は 1 [kg/L] と表現することができます。上の比例の関係式に、1[kg] と 1[L] を入れると、比例定数は 1[kg/L] になることを確認できます。

ところが「L」は SI ではあまり用いない単位です。そこで 1 [kg/L] を SI でよく用いられる単位 [kg/m^3] に換算してみましょう。ただし、1[L] = 10^3[cm^3] であることは知っているとします (この関係は、日常的にも知っておくべき関係なので覚えておきましょう)。これを次のようにステップごとに求めてみます。

1. とりあえず求める値を空欄にして等式で結んでみる。

   単位は異なっても、同じものを表しているのですから、等号で結ばれるべき量です。そこで、とりあえず、次のように表記してみます。

   $$1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{L}}\right] \qquad\qquad = \qquad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

2. “1” を掛け算して単位を揃えることを考える。

   左辺に 1 を掛けても値は変わりません。当たり前です。しかし、単に 1 を掛けるのではなく、少し工夫をしてみましょう。今回の例では、あらかじめ、1[L] = 10^3[cm^3] であることを知っているとしています。この両辺を、10^3[cm^3] で割るとどうなるでしょうか。

   $$\begin{aligned} 1[\mathrm{L}] &= 10^3[\mathrm{cm}^3] \\ \frac{1[\mathrm{L}]}{10^3[\mathrm{cm}^3]} &= 1 \end{aligned}$$

   このように求めた $\frac{1[\mathrm{L}]}{10^3[\mathrm{cm}^3]}$ は 1 なのだから、これを掛けても物理量は変わらないはずです。物理量としては不変のまま、単位については表示を変えることができるのです。

   $$1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\cancel{\mathrm{L}}}\right] \times \frac{1[\cancel{\mathrm{L}}]}{10^3[\mathrm{cm}^3]} \qquad = \qquad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

   このままでは、体積の単位が cm^3 になってしまいます。そこで、今度は、先ほど求めた 1[m^3] = 10^6[cm^3] という関係を用います。cm^3 を消去するために、$\frac{10^6[\mathrm{cm}^3]}{1[\mathrm{m}^3]}$(これも 1 です。) を掛けてみます。

   $$1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\cancel{\mathrm{L}}}\right] \times \frac{1[\cancel{\mathrm{L}}]}{10^3[\cancel{\mathrm{cm}^3}]} \times \frac{10^6[\cancel{\mathrm{cm}^3}]}{1[\mathrm{m}^3]} \quad = \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

3. 計算を実行する。

   これまで単位部分について着目してきました。数値の部分も計算します。すると、次のようになります。

   $$1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\cancel{\mathrm{L}}}\right] \times \frac{1[\cancel{\mathrm{L}}]}{10^3[\cancel{\mathrm{cm}^3}]} \times \frac{10^6[\cancel{\mathrm{cm}^3}]}{1[\mathrm{m}^3]} \quad = \quad 10^3\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

このようにして単位換算をすることができました。単位がちょうど消えるように注意しながら “1” を掛け算していくところがポイントです。

もちろん、このような計算をしなくても、「1[L] で 1[kg] なのだから、1000[L] で 1000[kg] で、1000[L] が 1[m^3] だから、1000[kg/m^3] である」と考えることもできます。ただし、より複雑な単位換算のときには、このように直感的に考えるのは難しくなります。より一般的な考え方を身につけておけば、対応は容易になります。

こぼれ話：体積の単位「リットル」

体積の単位リットルの表記のし方をどうするかは、いろいろ考える必要があります。その前に SI 単位の表し方の

いくつかのルールを紹介しましょう。

- 立体で表す

  「立体」とは「斜体」に対する言葉で、字体を斜めにしないもののことです。単位は立体で表し、一方で物理量を表す文字は斜体にします。これは既に学びました。

- 大文字は人名由来の単位に用いる

  通常、単位は小文字で表します。[m] がいい例です。ところが、力学を打ち立てたニュートンを由来とする力の単位 [N](p.29) などのように、人名由来の単位は大文字を用います。

それでは、「リットル」はどうでしょうか。そもそも、SI の単位ではありませんが、こうしたルールを守ろうとすると、単に小文字で立体の l (エル) を用いるべきです。しかし、 1 (いち) と極めて紛らわしいです。斜字体 l にすると物理量を表す文字と区別がつきません。そこで、多くの国では L を用いますし、それが国際的に認められたルールです。しかし、単位名の起源が人名ではないので不自然さがあります。厄介ですね。ここでは、国際ルールに従い、L で表すことにします。

課題

1. 「くまのプーさん」は 100 エーカーの森に住んでいるという設定です。エーカー (acre) とはどのような単位でしょうか。調べてみましょう。
2. 指数法則を確認しておきしょう。次の量を、指数を用いずに表してみましょう。
   (a) 10^3　(b) 10^{-2}　(c) $4^{0.5}$
3. 指数法則を確認しておきしょう。次の量はそれぞれ 10 の何乗でしょうか。
   (a) $10^2 \times 10^3$　(b) $(10^3)^4$　(c) $\frac{1}{10^2}$　(d) $\sqrt{10^{2\times3}}$　(e) $\sqrt{10^4}$
4. 日本の国土の面積は、おおよそ 37 万平方キロメートルです。日本の国土と同じ面積を持つ正方形の 1 辺の長さを求めてみましょう。練習のために計算機を使わずに、指数法則を使って単位に気をつけながら計算してみましょう。計算が大変にならないように、2 桁目を四捨五入して 1 桁の精度で求めてみてください。
5. 地球を 1 周の長さが 4×10^7[m] である球とします。次の量を求めてみましょう。練習のために計算機を使わずに、指数法則を使って、また、単位に気をつけながら計算してみましょう。計算が大変にならないように、2 桁目を四捨五入して 1 桁の精度で求めてみてください。
   (a) 地球の半径　(b) 地球の表面積　(c) 地球の体積
6. 次の比例関係について、その比例定数の名称を答えて下さい。
   (a) 報酬 (単位 [円]) と労働時間 (単位 [時間]) の比例関係
   (b) 質量と体積の比例関係
   (c) ある時刻のドルと円の価値の比例関係
7. 10[km] を 2 時間 (2[h]) かけて歩いたとします。その速さを計算した次の式の問題点を見つけてみましょう。
   $$10[\mathrm{km}] \div 2[h] \quad = \quad \frac{10}{2} = 5[h/\mathrm{km}]$$
8. 光の速さはおおよそ 3×10^8[m/s] です。東京–熱海間を 100[km] とすると、東京から出た光が熱海に到達するにはどれくらい時間がかかるでしょうか。
   ここで、次のような注意をしましょう。
   (a) 単位についても計算が成り立つことに注意しましょう。
   (b) 単位をそろえて計算することに心がけましょう。
   (c) 計算途中でも単位をつけて書くようにしましょう。
9. ある計算機は、1 秒間に 3×10^9[回] 計算できるとします。1[回] 計算する間に、光が進める距離はどれくらいでしょうか。ここに書いたような数字にも単位をつけて、3×10^9[回/s] あるいは 3×10^9[Hz]=3[GHz] とすることができますので、こうした単位を用いてみましょう。
10. 単位換算してみましょう。

(a) 1 [m]　= ________________ [nm]

(b) 1 [m^3] = ________________ [cm^3]

(c) 空気の密度は、地表面付近では、おおよそ 1.2 [kg/m^3] です。これを [g/L] という単位で表してみましょう。

(d) 風速 10 [m/s] とは、空気が時速何キロメートルで移動していることを表しているのでしょうか。

第3章　力学

物理学の長い歴史を考えたとき、現代の物理学に直接つながるようなルーツは、誰の研究でしょうか。これについては、いろいろな考え方があると思います。私は**ガリレオ・ガリレイ** (1564-1642) を挙げます。それは、「仮説を実験で確かめる」という方法を初めて確立した人だからです。ガリレオの研究の中で、最も重要と考えられるのは、物体の運動に関する研究です。ガリレオ・ガリレイの没後、**アイザック・ニュートン** (1643-1727) が生まれました。**ニュートン**は、ガリレオの研究を基に、「**力学**」あるいは「**古典力学**」と呼ばれる学問分野を確立しました。この学問分野は、ガリレオの研究を出発点にし、天体を含む物体の運動を対象としたものでした。その法則は現在でも使われています。また、物理学を勉強すると、力学とは関係のない現象についても、力学で用いた考え方をそのまま適用できる例が数多くあります。力学は、物理学の中で最初に研究が進んだ学問分野であり、物理学の最も基礎的な分野です。

3.1　座標系

物理学で扱う様々な量は、**物理量**として表すことで扱えるようになります。力学の場合には、まず、物体の**運動** (物理学では「運動」には「体操」の意味はありません。移動・回転・変形などの意味です。ここでは単に移動の意味です。) の様子を物理量を用いて上手に表す必要があります。

運動の様子を表すには、まず、位置を表す必要があります。では、どのように位置を表したらいいでしょうか。そのためには、基準になる点を決めて、その点からの「ずれ」で表現するといいでしょう。その基準になる点を**原点**あるいは**座標原点**といいます。

原点からのずれはどのように表したらいいでしょうか。例えば、原点から東に x 移動し、そこから北に y 移動し、更に上に z 移動するという表現ができそうです。もちろん他にも方法は沢山あります。しかし、このようにする方法はもっとも簡単です。まとめると、位置は次のような方法で表せます。

1. ある地点を原点とする。
2. 原点から東への移動量 x、北への移動量 y、上への移動量 z をとる。

こうすることで、位置を x, y, z によって表すことができます。三つの量を与えることで位置が決まるような空間の広がりを 3 次元といいます。ちなみに、2 次元は二つの量で位置が決まる面に対応し、1 次元は一つの量で位置が決まる線に対応します。x と y については、特に東と北でなくてもいいです。しかし、次のようにするのが普通です (図 3.1 の右側)。

- x, y は水平面内にとり、z は鉛直上向きにとる
- y 軸の正の向きは、上から見て、x 軸の正の向きの左側 (x 軸の正の向きは y 軸の正の向きの右側) にとる

x の方向に沿った原点を通る直線を x **軸**といいます。x 軸は向きを考えます。つまり、正の向き (x の値が増える向き) と負の向き (x の値が減る向き) があります。x 軸上の点の原点からのずれを x **座標**といいます。その点が原点から正の向きにずれていれば x 座標は正で、負の向きにずれていれば、x 座標は負です。y, z についても同様です。x 軸,y 軸 ,z 軸 は、それぞれ**座標軸**といいます。また、原点と座標軸を合わせた位置を表す仕組み全体を**座標系**[1]といいます。

こぼれ話：右手系と左手系

x 軸と y 軸のとり方について、y 軸の正の向きが x 軸の正の向きの左側になるようにとるのが普通だと述べました。

[1] 一般的には座標軸が曲がっていても構いません。しかし、座標軸が曲がっている場合には話がやや複雑になります。そこで、本書では、座標軸が互いに直交する直線であるような場合だけ考えます。このような座標系は、より正確には「**直交座標**」といいます。

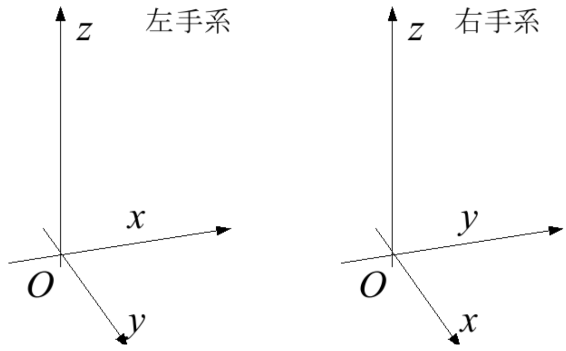


図 3.1: 3 次元の座標系 (右手系と左手系)

このように設定した座標系を**右手系**といいます (図 3.1 右)。x, y, z の順に、親指、人差指、中指を対応させることができるからです。x 軸と y 軸を入れ換えると、(普通の人では) 右手で対応させることができず、左手なら同様に対応させることができます。そのような意味で、これを**左手系**といいます (図 3.1 左)。

両者は互いに鏡に写した像のような関係 (**鏡像関係**) で、三つの軸を同時に重ねることができません。私たちは特に理由が無い限り、右手系を使うことになっています。

3.2　ベクトル

ベクトルとは

図 3.2 のように大きさに加えて向きを持った物理量を**ベクトル**といいます。この図で、矢印で描いたベクトルの根元を始点、先端を終点といいます。ここで強調しておきたいのは、一般的にはベクトルは始点を選ばないということです。平行に移動して一致する矢印は全て同じベクトルと考えます。

ベクトルの表し方

ベクトルは図で表すことしかできないのか、というとそのようなことはありません。定量的に数値を用いて表すこともできます。具体的には、ある座標系を設定し、ベクトルの始点と終点で作られ、辺が各軸に平行な直方体を考えます。そして、その直方体の各辺の長さを使えばいいのです (図 3.3)。このように、ベクトルは物理量（ここでは長さ）を書き並べて表すこともできます。これらの物理量一つ一つを**成分**といいます。特に座標系の x 軸に対応する成分を x 成分などといいます。

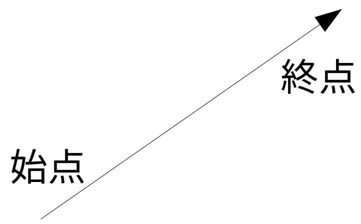


図 3.2: ベクトル

各成分を書き並べて表す方法にも種類があります。次のように横に並べて書くのは**横ベクトル**と呼ばれています。

$$(3, 5, -1)$$

それに対して成分を縦に並べて**縦ベクトル**として

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と書くこともあります。この本の範囲では、これらのベクトルの書き方は区別しません。単なる書き方の違いであると考えて下さい。

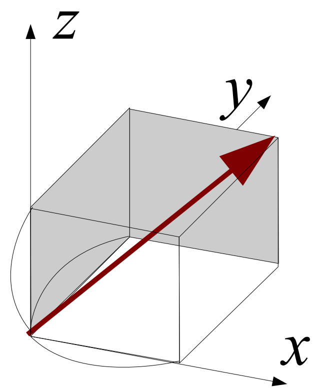


図 3.3: ベクトルの成分

また、ベクトル全体を一つの文字で表すこともよくあります。ベクトルでない普通の量 (**スカラー**といいます。) と区別するために、太文字にするか、上

に矢印をつけます。例えば、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

あるいは、

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

といった具合です。矢印のようなもの、あるいは、数字の集まりを一つの文字で表すのは変な気がするかもしれません。しかし、このベクトルには演算ができるので、文字で書いておく方が便利なのです。その演算については後ほど説明します。

位置ベクトル

ベクトルの一つの典型的な例は位置に対応したベクトルである**位置ベクトル**です。座標系を決めると、ある点の x 座標、y 座標、z 座標が定まります。これらを、それぞれ x 成分、y 成分、z 成分とするようなベクトルがその点に対応する**位置ベクトル**です (図 3.4)。

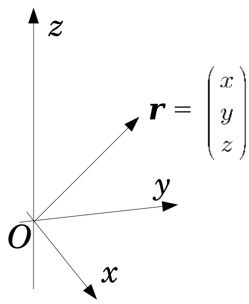


図 3.4: 位置ベクトル

位置ベクトルもベクトルの一つですから平行移動しても同じものです。原点を始点にした場合には、終点が考えている点の座標になるような、そのようなベクトルが考えている点の位置ベクトルなのです。

ベクトルの演算

スカラーについて四則演算 $(+, -, \times, \div)$ があるように、ベクトルにもいくつかの演算があります。以下では、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{s} = (u, v, w)$ とします。

1. スカラー倍

   ベクトルの向きはそのままに、長さを a 倍 (a はスカラー) する演算です。

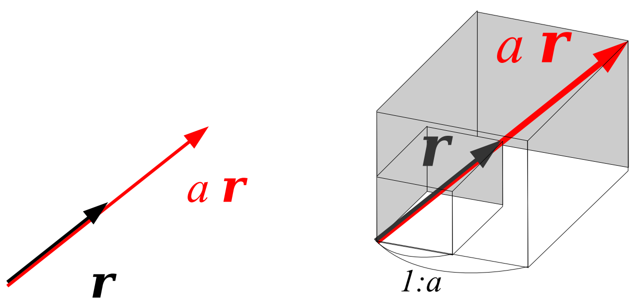


図 3.5: ベクトルのスカラー倍

成分で書いてみましょう。

$$a\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

長さが a 倍になると、各成分も a 倍になります。これは、図形的にも理解することもできます。原点と位置ベクトルの終点を対角とする直方体を考えてみましょう (図 3.5 右)。ベクトルが a 倍されると、直方体の各辺の長さも a 倍になります。これは各成分が a 倍になることに対応しています。a が負の場合にはどうなるでしょうか。成分の正負がすべて逆転します。これはベクトルが逆向きになったことを意味します。

2. 足し算

原点から東、北、上へ、それぞれ x、y、z 移動した地点から、更に東、北、上へ、それぞれ u、v、w 移動した地点を考えます。すると、最終的な到達地点は、原点から東へ $x+u$、北へ $y+v$、上へ $z+w$ ずれた点になるはずです。このように考えると、ベクトルにも足し算が定義できそうです。ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z), \boldsymbol{s}=(u,v,w)$ の足し算を次のように成分同士の足し算で定義します。

$$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix}$$

これを図を用いて考えてみます (図 3.6)。簡単のために 2 次元とします。図の右側を見てください。赤で示されたベクトルの x 成分は、ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ の x 成分の合計になっています。y 成分も同様です。そこで、赤いベクトルが $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}$ になります。

別の言葉で言えば、$\boldsymbol{r}$ の終点と $\boldsymbol{s}$ の始点を一致させたとき、$\boldsymbol{r}$ の始点と $\boldsymbol{s}$ の終点からなるベクトルが $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}$ となります。あるいは、同じことを別の表現で表すと、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ の始点を一致させたとき、二つのベクトルで作る平行四辺形を考えて、共通の始点を始点とし、新たに作られた対角の頂点を終点とするようなベクトルである、とも言えます。

この時、足してできたベクトル ($\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}$) の大きさは、二つの元のベクトル ($\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$) の大きさの和より小さいことに気をつけましょう。三角形の 1 辺の長さは、他の 2 辺の長さの和よりも短くなります。ベクトルの足し算は、大きさの足し算ではないことが特徴の一つです。

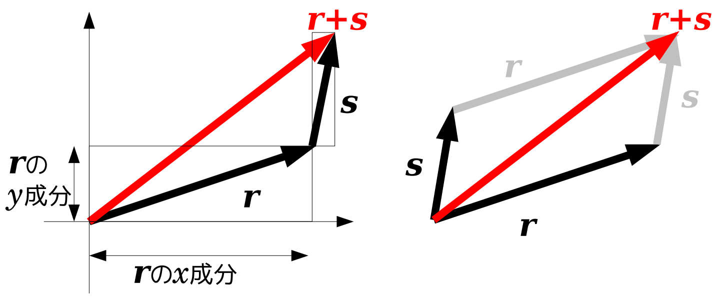


図 3.6: ベクトルの足し算

3. 引き算

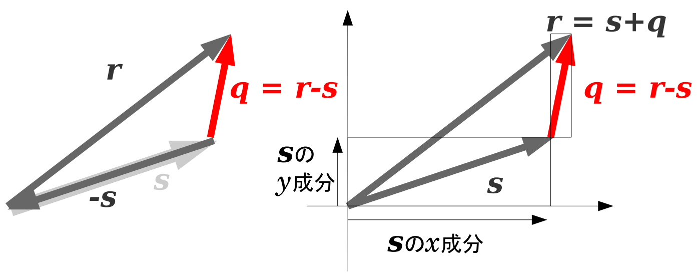


図 3.7: ベクトルの引き算

足し算が定義できると引き算を定義するのは比較的簡単です。$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}$ は、$\boldsymbol{s}$ を -1 倍 (スカラー倍) してから $\boldsymbol{r}$ に加えればいいからです (図 3.7 左)。足し算が成分ごとの足し算で表されたことを考えると、引き算の場合でも、引き算の結果は成分同士の引き算で表すことができることになります。

学びの Tips：引き算

ベクトルの引き算の意味をより明確にするために、ここでは別の観点から考えてみましょう。図 3.7 に示したように、$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{q}$ とします。すると、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}$ です。

図 3.7(右) で、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ を位置ベクトルと考えましょう。すると、$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}$ が表すものは、「位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が表す位置を、$\boldsymbol{s}$ の終点を原点として位置ベクトルで表したもの」になっていることが分かると思います。つまり、$\boldsymbol{s}$ の終点を基準として $\boldsymbol{r}$ の示していた位置を表したものが $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}$ となっています。

このように、「あるもの (ここでは $\boldsymbol{r}$) を、元の基準から (ここでは $\boldsymbol{s}$ だけ) ずれた別の基準で表すと、どのよう表されるか」を引き算で表すことが多いです。この点を覚えておきましょう。例えば、私たちは、キリストが生まれた年を基準に西暦を数えます。西暦 2017 年を、平成 0 年に対応する西暦 1988 年を基準に取り直して表すと、2017-1988=29 となります。西暦 2017 年は平成 29 年です。

ここまで、ベクトルの足し算、引き算、スカラー倍を学んできました。成分で見ると、成分同士の足し算であったり引き算であったり、定数倍であったりしますので、それほど違和感は無いと思います。

3.3　運動の表現

運動を表すとはどういうことか

物体の位置を表すことができるようになりました。それでは物体の**運動**はどのように表したらいいでしょうか。運動を表すときのポイントは、位置と時刻です。ある時刻に、物体がどこにあるのか、それが分かれば物体の運動が分かったことになります。つまり、物体の位置を**時間の関数**として表せばいいのです。私たちが通常、動きのあるものを記録する場合には、ビデオカメラで動画として撮影します。これで時刻に対応した物体の位置がわかるようになります。

学びの Tips：関数

ところで "関数" とはどのような意味でしょうか。復習しておきましょう。「A は B の関数である」とは、B が与えられると (決まると)、A が一通りに決まるような対応関係をいいます。本文の場合は、時刻が決まると位置が決まることを意味しています。そのような意味を明確にするために $A(B)$ と表すことが多いです。また、B は**独立変数**、A は**従属変数**と呼ばれています。

「A が B の関数である」という関係を表すグラフを描く場合、どちらを横軸にし、どちらを縦軸にするでしょうか。これは習慣で決まっていて、B が横軸で A が縦軸とすることが多いです。これを意識しておくとグラフが見やすくなります。

また、これからいくつかの物理法則を学んでいきます。実は物理法則も対応関係です。何かが分かると、それに対応して別のものが分かるような対応関係です。

しかし、実際に物体の運動を考える場合には、ビデオ撮影は必ずしも都合がいいとは限りません。一つには、私たちが扱う時間が、例えば 30 億年であったり、1 ms (ミリ秒) であったりするからです。もっとも、これは、時間の縮尺を変えて、早回しで再生したり、逆に、ゆっくり再生したりすればいいでしょう。別の理由は、私達の脳の働きです。残念ながら、私達の脳は、動画を処理するよりも、静止した映像 (静止画) を処理することに向いているようです。つまり、異なる時刻の状態が一度に見えていないと、運動の様子を適切に理解できません。そこで、時間による変化を 1 枚の画像に記録する必要があります。そのような表し方は主に 2 通りあります。軌跡としての表現と、時間変化のグラフとしての表現です。

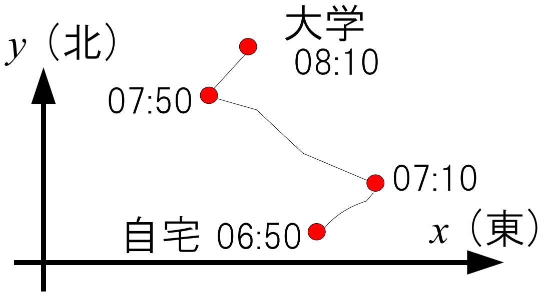


図 3.8: 自宅から大学までの運動の様子

方法 1：軌跡としての表現

例えば、朝、家を出てから大学に着くまでの自分自身の運動を考えてみましょう。人間はあまり鉛直方向には移動しませんから、上空から見下ろした地図を描き、その上に、各時刻で自分がいた位置を記していきます。すると、自分の運動が時間の関数として記述できます。位置を線でむすんだものは、移動した経路 (**軌跡**) を表します (図 3.8)。

方法 2：時間変化のグラフとしての表現

軌跡による表現では、一定の時間の後にどれだけ移動したか、ということが分かりません。移動した量は見てわかります。ところが、時間間隔については、いちいち時刻の値を読んで頭の中で考えなければならず、分かりにくいです。そこで、今度は時刻の変化量も長さとして表してみます。

例えば、ボールを落とすビデオを撮影したときのことを考えます。ボールの高さの時間変化が分かるように、まず、ビデオを構成する画像 1 枚 1 枚のボールの写っている部分を切り出します (図 3.9 左)。次に、それを横に並べていきます。こうすることで、横方向の長さが時間に対応します。そして、高さの時間変化が分かるグラフができあがります (図 3.9 右)。

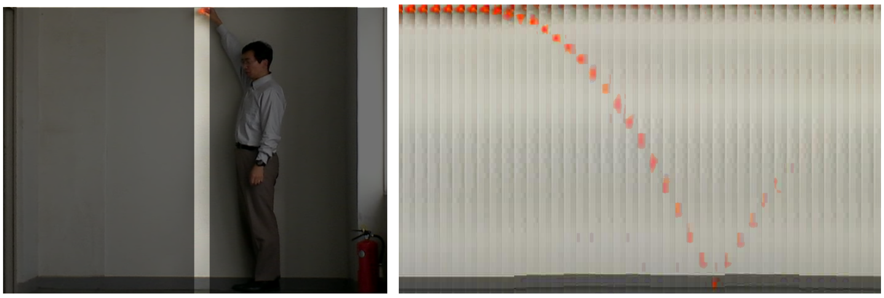


図 3.9: ボールが落下する様子を移したビデオの一場面。右手にボールを持っている (左)。各画像からボールの部分を短冊状に切り出した画像を並べたもの (右)

しかし、次のような点で注意が必要です。それは、このような表し方が一面的であることです。実際のボールの運動は 3 次元的です。ここで表したのは、そのうちの高さだけのグラフです。実際のボールの運動は 3 次元であったとしても、大切な情報は高さについてであって、他の方向の位置の情報はあまり重要でないと考えられます。ボールをそっと落下させる場合には、高さの変化を知りたいと思って実験しているからです。場合ごとに、どのようなデータを選んで図にするかをしっかり考える必要があります。

例：等速直線運動の表現

ここで、練習も兼ねて最も簡単な運動を考えてみます。直線上を一定の**速度**で移動する運動 (**等速直線運動**) です。先に述べた運動の記述のし方にならって、二通りの方法で運動の様子を図にしてみます。一つは、軌跡としての表現 (図 3.10 左) で、もう一つは座標の時間変化のグラフとしての表現です (図 3.10 右)。

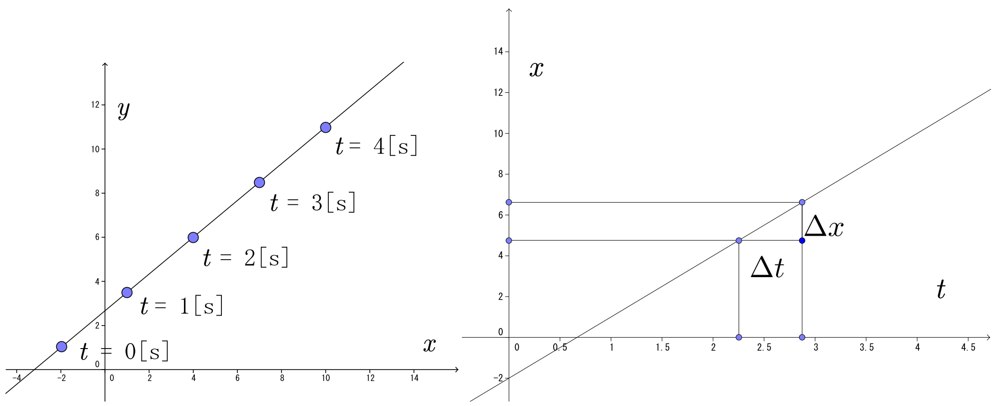


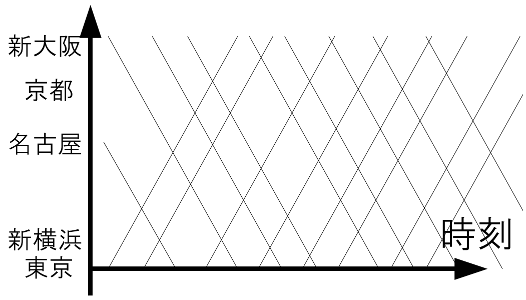
図 3.10: 等速直線運動の軌跡 (左) と x 座標の時間変化 (右)

このように二通りの方法で表すことができます。さて、これらの図で、**速度**はどのように表されるでしょうか。左の図では、時刻の数値を読みながら考えないと速度は分かりません。それでは、右の図ではどうでしょうか。この図では、

x 方向の速度は傾きとして表されます。一定の時間が経過 (一定量横軸に沿って移動) した場合に、どれだけの距離進むか (縦軸に沿って移動するか)、を考えると、それは直線の傾きに対応していることが分かります。つまり、傾きが大きい程速度が大きく、傾きが小さい程速度が小さくなります。

こぼれ話：列車の運行表 (ダイヤグラム)

運動の表現の 2 番目の方法は、鉄道のダイヤグラム (列車運行をグラフ化したもの) と同様の考え方です。東京駅と新大阪駅の間を往復する新幹線を想定したダイヤグラムを下の図に示します。このような図にすることで、時間の変化量と位置の変化量の両方を見やすくすることができます。



鉄道ファンの方に話を伺ったところ、実際のダイヤグラムでは、列車の運行が直線で表すことができるように、縦軸の駅の間隔は、ほぼ実際の駅の間隔に比例するように作成されているそうです。正に等速直線運動のグラフです。駅の途中で写真を撮影する場合、このようなダイヤグラムがあるととても便利だそうです。

3.4 グラフの傾きと微分

ここで、グラフの**傾き**について確認しておきましょう。スキー場では、斜面の傾きを、よく (**六十分法**の) 角度で表します。この方法は小学校以来、慣れていると思います。しかし、交通道路標識では、急な坂道であることを示す場合に、斜面の傾きを割合で (“%” を使って) 表しています (図 3.11)。これは、水平方向に 100 [m] 移動した場合に、鉛直方向に何 [m] 移動したかを表しています。10%ならば、100[m] 進んで、10[m] 上がるような坂道です。

図 3.11: 道路標識

それでは、グラフの傾きを表すのにはどちらが適当でしょうか。それは交通道路標識の方式です。実際にグラフの傾きを割合で表してみましょう。図 3.10 右側を見てください。時間が Δt だけ変化し、座標が Δx だけ変化しています。割合で表した傾きは $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ となります。

こうして求めた傾きは、t の変化（時間変化）に伴う x の変化（位置の変化）の割合です。また、**単位時間**当たりの位置の変化量 (進んだ距離) に当たりますから、これは速度になります。位置の時間変化を表すグラフの傾きは速度と一致します。

学びの Tips：Δ (デルタ)

ここで “Δ”(**デルタ**) について簡単に説明しておきます。読み方は「デルタ」です。ギリシア文字 (Appendix B.2 p.95 参照) で、英語の “D” に当たります。数学では文字で表された変数の掛け算を続けて書くからといって、Δt を $\Delta \times t$ だと思ってはいけません。これは一つのかたまりで、「t の変化分」を表します。 “差” を表す “Difference” の頭文字 D に対応したギリシア文字を選んで使っています。

アルファベットは 26 文字しかないので、様々なものを表すときにこのように他の文字と組み合わせます。後で出てくる添字も同様です。このようなものは簡単なルールに則って使われますが、知らないと混乱するので気をつけましょう。

等速直線運動の例では、グラフの傾きが一定だったのでグラフの傾きを扱うことは簡単でした。しかし一般に、t の関数 $x(t)$ のグラフは直線ではありません。傾きはグラフの場所によって変わっています。こういった場合の傾きはどのように考えることができるでしょうか。簡単には、グラフ上の各点でグラフに接する接線を引き、その傾きをその場所での傾きとする考え方です。では、接線を決めるためにはどうすればいいでしょうか。そして、その接線の傾きを決めるにはどうしたらいいでしょうか。

ある点 A(時刻 t、位置 x) でグラフの接線を考えて、その傾きを決めるためには、その点のすぐ近くの点 B($t + \Delta t$、$x + \Delta x$) をとり、A と B を結んでできる直線の傾きを考えれば、求める傾きにとても近いはずです (図 3.12 左)。

そして、B を A に近づければ近づけるほど、A B を結ぶ線は接線に近づきます。そして、その傾きはA 点での傾きに近づくはずです (図 3.12 右)。このとき、Δt も Δx もゼロに近づくにもかかわらず、直線の傾き $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ は一定の値に近

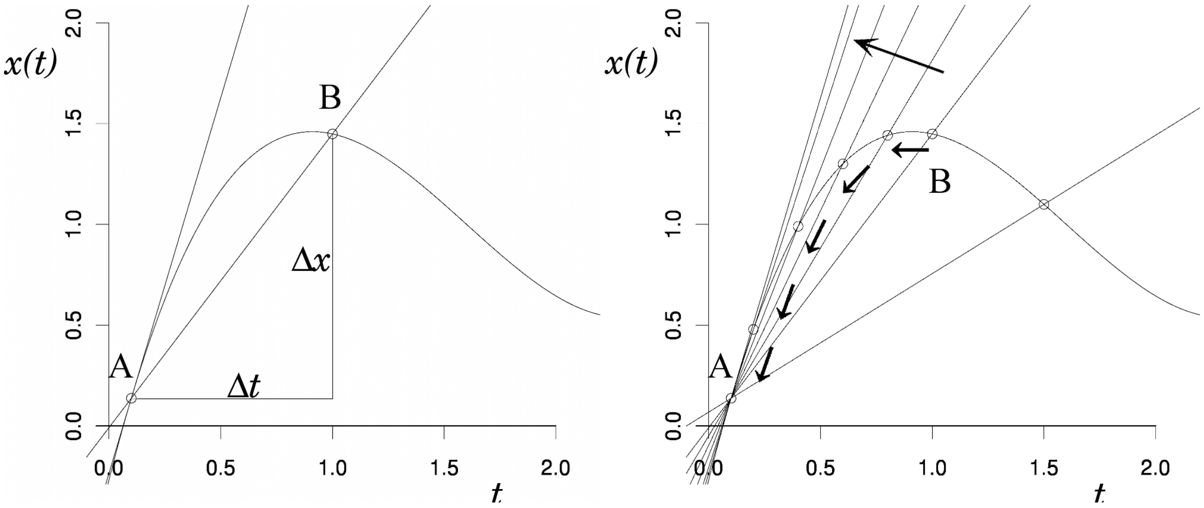


図 3.12: 点 A 点 B の間を直線で結んだときのグラフの傾き

づくことに気をつけてください。これは、図 3.12 の右の図で、Δt をゼロに近づけると AB を結ぶ線が一つの接線に近づいていくことに対応しています。$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ の値は、接線の傾きに近づくので、ある値に近づくのです。

B を A に近づけた**極限** (B は A と一致はしていないが、両者の間の距離を限りなく 0 に近づける操作)[2]での傾きを A 点での**微分係数**といいます。すなわち、A 点での微分係数とは A 点での接線の傾きです。A 点以外でも同様に定義ができますから、微分係数を t の関数として定めることができます。特に、t の関数として求められた微分係数は、元の関数（例えば $x(t)$）の**導関数**といいます。つまり、導関数と微分係数は同じもので、ある点での傾きを微分係数というのに対して、傾きを t の関数として表すときには導関数というのです。また関数 $x(t)$ から、導関数を求めることを**微分**するといいます。「関数 $x(t)$ を t で微分する」というような言い方をします。

以上は、微分に関係したいろいろな言葉の意味です。こうしたことを簡潔に記号で表した方が扱いやすいので、次のように表記する決まりがあります。こうした表記にも慣れておきましょう。まず、極限についての表記です。「Δt を限りなく 0 に近づける」ことを

$$\lim_{\Delta t \to 0}$$

で表現します。そして「Δt を限りなく 0 に近づける場合の $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ の値」を

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表します。これは微分係数を表しています。この表記は長いので、微分係数を $\frac{dx}{dt}$ と書き表します[3]。

$$\frac{dx}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.1}$$

微分係数が t の関数であると考えて書くとき（導関数として書くとき)、$\frac{dx(t)}{dt}$ とも表します。コラム「学びの Tips：Δ (デルタ)」(p. 21) に記したように、d と t あるいは d と $x(t)$ とは切り離して書くべきではありません。しかし、習慣として、$\frac{d}{dt}x$ と表すこともあります。このような習慣があるのは、一つには「導関数の導関数」を考えることがあるからです。それを $\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}$ と書くのは非常に煩雑なので、$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}$ と書いたり、あるいは、$\frac{d}{dt}$ が 2 回現れることから $\frac{d^2}{dt^2}x$ と書いたりするからです。

ここで注意があります。正確には、「**微分**」は導関数 $\frac{dx}{dt}$ に独立変数 t の極めて微小な変化量 Δt(これを dt と書き表します。) を掛け合せた $\frac{dx}{dt}dt$ のことをいいます。これを簡単に dx とも書きます。ところが、時々、導関数のことを微分と表現している場合が見受けられますので注意するようにしてください。

学びの Tips：なぜ微分することを考えるのか？

数学や物理学で微分や積分がでてくると、それだけで嫌な感じがしてしまう人も多いと思います。ただ接線の傾き

[2]このような操作を行って得られる値を極限値といいます。定義によっては、極限値を極限ということもあります。
[3]式中の記号 ≡ は、単なる等号ではなく、定義を表すときに用いられる記号です

を求めるだけなのに、なぜ、こんなに大騒ぎするのでしょうか。

その理由の一つは、「微分することが (簡単!? に) できてしまう」ことにあります。例えば、$x(t) = t^3$ の場合、$\frac{dx}{dt} = 3t^2$ になります。一般に、$x(t) = t^n$ の場合、$\frac{dx}{dt} = nt^{n-1}$ となります。このように、微分計算の規則があって、多くの場合、計算できてしまうのです。これは大変便利な性質です。そこで、微分法が登場することが多いのです。

この本では微分法を詳しく勉強することはしません。しかし、意味が分かることは大切ですので、次の章ではグラフを用いた練習を行います。

3.5 位置と速度と加速度

1 次元の場合の位置と速度

これまでの議論で 1 次元の場合の**速度**が求まります。横軸に時刻 t、縦軸に位置 x をとったときのグラフの傾きが速度です。すなわち、x を t で微分したときの微分係数が速度です。

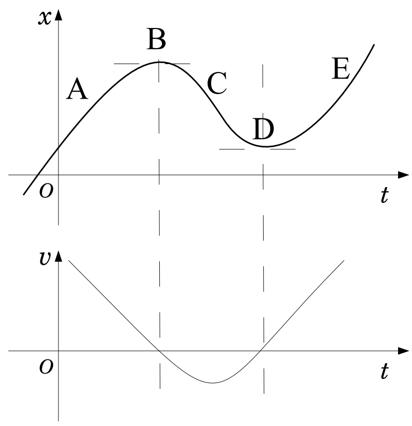


図 3.13: 位置のグラフから速度のグラフを作る

速度をこのように定義したときに、気をつけておかなければならない点があります。それは、速度の正負です。グラフの傾きを速度と定義すると、必然的に速度には正負があります。速度が負であるとはどういうことでしょうか。それは、グラフの傾きが負の状態を考えればわかるように、時間と共に x が減少する状態である、すなわち、x 軸の負の方向に向かって進んでいることを表しています。そこで、速度が負のときは、速く進んでいる場合でも、速度はゼロより小さい、と言えます。

物理学では、「速度」と「**速さ**」をときどき区別します。「速度」は正負がありますが、「速さ」はその絶対値を表す、といった具合です。

ここでは具体的に微分計算を行うのではなく、グラフで速度について考えてみましょう。例えば、次のような $x-t$ のグラフを考えます (図 3.13 上)。グラフ中の A での傾き(速度)は正です。時間が経つにつれて x の値は増えているからです。ところが、時間が経過し、B に対応する時刻になると、傾きがゼロになります。そして、C に対応する時刻では傾きは負です。D で再び傾きはゼロになり、再び E で傾きが正になります。こうした傾きの時間変化をグラフに表したのが下のグラフです。このように、微分することの意味が分かっていれば、位置のグラフを用いて速度のグラフの概要を知ることができます。位置 x の時刻 t についての導関数の概要を求めることができるとも言えます。

1 次元の場合の速度と加速度

図 3.13 の下の図は、速度 v を時刻 t の関数として表したものです。$x-t$ のグラフの傾き (微分係数) を考えて速度 v を求めることができたように、$v-t$ のグラフの傾きを考えることができます。

$v-t$ のグラフの傾き ($v(t)$ の t についての微分係数 $\frac{dv}{dt}$) を**加速度**といいます。図 3.13 から加速度のグラフを作成してみましょう。やり方は $v-t$ のグラフを作成した時と同じなので、自分で練習してみてください。

位置 $x(t)$ の微分係数として速度 v を、また、速度 $v(t)$ の微分係数として加速度 a が定義されるので、数学的には次のように表されます。

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dx}{dt} \\
a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}
\end{aligned}
$$

ここで、加速度の意味を考えてみましょう。

速度は、時間と共に位置がどのように変化するか、その変化の割合を表していました。同様に、加速度は、時間と共に速度がどのように変化するか、その変化の割合を表します。例えば、加速度が正で一定である時、速度は時間と共に一定の割合で増すことを意味します。速度が増すことを「加速する」と表現しますから、加速の割合、と言えるでしょう。

ただし、正負に気をつけなければなりません。同じ速さでも、速度にも正負がありえました。同じような話が加速度についても言えます。速さが増しているときに、私たちは「加速する」と表現したいかもしれません。しかし、速度が負で速さが増すときは、「速度は減少する」と表現すべきことに気をつける必要があります。その結果、このとき、加速度は負となります。

変位

今度は 2 次元の場合を考えてみましょう。ある物体のある時刻 t での**位置ベクトル**を $\boldsymbol{r}(t)$ とします。時間が Δt だけ経過した後の時刻 $t+\Delta t$ の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ と表せます。時間 Δt の間の位置ベクトルの変化は、$\boldsymbol{r}(t)$ を基準にして $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ と表すことができます。このような、時間の経過に伴う位置ベクトルの変化量 (位置ベクトルの差) を**変位** (あるいは変位ベクトル) といい $\Delta\boldsymbol{r}$ と表します。ここで、ベクトルの差を成分で考えると、それはベクトルの成分の差であったことを思い出しましょう。すると、変位の成分は、もとの二つのベクトルの成分の差になります。$\boldsymbol{r}$ の成分を (x, y) と表すと次のようになります。

$$\Delta\boldsymbol{r} \;=\; \boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t+\Delta t)-x(t) \\ y(t+\Delta t)-y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

速度ベクトル

位置ベクトルを微分することができるかどうかを考えてみましょう。1 次元のときと同じように**微分係数**を定義すると「位置ベクトルを時間で微分する」とは、次のように定義されます。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

式 (3.2) にも書き表したように、変位ベクトルの成分は、各成分の差として表されます。また、$\frac{1}{\Delta t}$ を掛けることはスカラー倍なので、各成分に $\frac{1}{\Delta t}$ を掛けることになります。そこで、位置ベクトルの各成分を時間 t の関数と考えて、その各成分を時間で微分すればいいことになります。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}=\lim_{\Delta t\to 0}\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

このようにして定義することができるベクトル $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y)$ を**速度ベクトル**あるいは単に**速度**といいます。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \;=\; \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

学びの Tips：添字

ここで、表記の仕方の注意をしておきたいと思います。v の右下に書いた $_x$, $_y$ などの小さな字は「**添字**」と呼ばれています。v と組み合わせて v_x や v_y などとします。これらは添字を組み合わせた上で一つの文字として扱われます。アルファベットの数が多くない上に、いろいろな記号を用いると分かりにくくなるので、一つの文字に添字を付けて意味を持たせ、それぞれの物理量を区別するのです。この事情は “Δ” と同様です。物理学や数学ではこうした書き方をよく用います。今後も現れてくるので気をつけてください。

学びの Tips：速度ベクトルの大きさ？

「ベクトルには大きさと向きがある」という表現の仕方をします。そして、速度はベクトルです。このことに対して、「速度ベクトルの大きさとは何のことでしょうか？」という質問を受けました。最初はその質問の意味が分かりませんでした。物理学を勉強し始めて何年も経つと、当初、不思議だと思ったり、違和感を持ったりしたことも、自分の中では当たり前になり、それに気づかなくなります。これも、その例の一つだと思います。

話を元に戻しましょう。位置ベクトルの大きさは、まさに原点からの距離になりますから、長さとして表すことが適当です。しかし、速度ベクトルの大きさの場合はどうでしょうか。例えば、1 [m/s] という速度ベクトルの大きさ (速さ) があったときに、そのベクトルをどのように表せばいいのでしょうか。速度ベクトルの成分は、単位 [m/s] を

持つような物理量です。そのようなことを考えると、よく分からなくなります。

実際に、速度ベクトルを目に見える形で表すことは無理だと思われます。1m/s という物理量は、目で見える大きさではないからです。そこで、私たちは、例えば「速さ 1m/s の速度ベクトルを 1cm の長さのベクトルで表す」というようにして、速さを長さに対応させてベクトルを表記します。それは理解を簡単にするためにそうするのだ、ということを、頭の片隅に覚えておくといいでしょう。

これで 2 次元の場合にも速度を定義できました。話は長かったかもしれません。しかし、結果は単純です。結局、x 成分だけを考えて、1 次元のときと同様に速度を求めれば、速度の x 成分がわかります。y 成分についても同様に求めれば速度ベクトルがわかるのです。3 次元の場合も同様に定義できます。

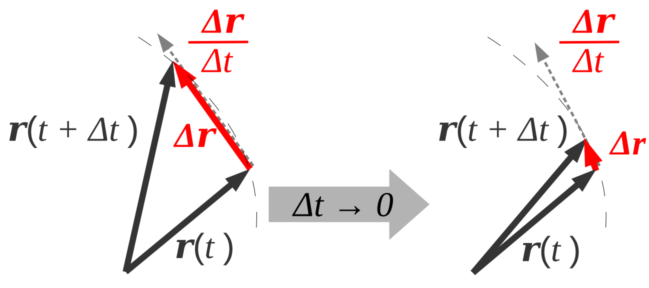


図 3.14: 位置ベクトルの時間変化 (変位)

しかし、1 次元の場合では考える必要がなかった大切な点もあります。まず、速度ベクトルの向きについてです。速度ベクトルを図 3.14 で考えます。図から、変位が物体の軌跡に沿った方向 (に近い方向) を向いているはずであることがわかります。Δt をゼロに近づけた極限では、変位は軌跡の方向に一致し、速度ベクトルの向きは軌跡に沿うはずです。

次に大きさについても確認しておきましょう。Δt を十分に小さくすると変位 $\Delta \boldsymbol{r}$ の大きさも小さくなります。しかし、これを十分小さな Δt で割れば、図 3.14 にあるように $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ は一定の大きさに近づきます。これは図 3.12 で傾きが一定の値に近づくことに対応しています。

なお、物理学では**速度**と**速さ**を区別します。速度が向きと大きさを持っているのに対して、速度の大きさを速さといいます。1 次元の場合でも、負の値も考えるのであれば向きを考えているので速度といいます。常に絶対値を考えて正の値を考えるなら速さです。2 次元や 3 次元の速度はベクトルであるのに対して、1 次元の速度や速さはスカラーであることは、すぐわかると思いますが、念のためここで確認しておきます。

加速度ベクトル

一般には**加速度** $\boldsymbol{a}$ もベクトルであり、1 次元の場合と同様に速度 $\boldsymbol{v}$ の時刻 t についての微分係数で定義されます。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) \\
\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

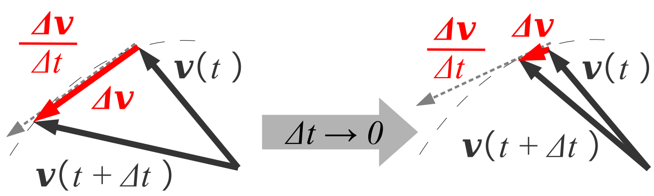


図 3.15: 速度ベクトルの時間変化

速度は位置 $\boldsymbol{r}$ を時刻 t で微分したものであったので、加速度は位置 $\boldsymbol{r}$ を時刻 t で 2 回微分したものになります。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このように微分係数によって加速度を定義できました。もちろん、一般的には、加速度も時間変化しますので、加速度の時間変化を考えることもできますし、更に、加速度の時間変化の時間変化を考えることもできます。しかし、これらについては特に名称もありませんし、これらを扱うこともありません。その理由は、物体の運動について考えるときには、加速度がとても重要であることが分かっているからです。これについては後ほど改めて扱います。

3.6 運動の法則

さて、ここまでで運動の様子を表現することができるようになりましたし、運動についての基本的な物理量である位置と速度と加速度についても学習しました。それでは、こうした物理量は、何によって決まっているのでしょうか。

ニュートンは次の三つ**運動の法則**を見出しました。

慣性の法則

昔から、人々は、物体の運動と力とが関係あると考えてきました。ただし、多くの場合、速度と力に直接的な関係があると考えられていたようです。16 世紀頃になると、あいまいだった運動と力の関係をしっかり考えるようになりました。まず、**ガリレオ・ガリレイ**は、力が作用しなければ物体はそのまま進行しつづけると考えました。ただし、正確には**万有引力**を知らなかったガリレオは、水平面上を運動する物体は、力が作用しなければ地球を一周するだろうと考えました。この世の中には力が全く作用しないことはありえませんので、これは実際に実験して確かめた訳では無く、頭の中で考えた**思考実験** (頭の中で行う仮想的な実験) です。ニュートンによって修正され、物体には一度動き出すと、力が加わらない限りそのまま一定の速度を保って一直線上を動く性質があるとされました。この性質を**慣性**といいます。また、力を加えられていない物体が一定の速度で移動すること (等速直線運動すること) を**慣性の法則**といいます。

運動方程式

次に、ニュートンは、力と関係があるのは、物体の加速度（速度の変化量）であることに気づきました。ここでは、ニュートンが発見した力と加速度の関係について詳しくみてみましょう。三つの観点に分けて話を進めます。

1. 速度の変化量と力の大きさ

   まず、速度の変化量 (Δv) は力 (F) に**比例**します。

   $$\Delta v \quad \propto \quad F$$

   記号 “$\propto$” はその両側の量が比例することを表しています (「学びの TIPS : 比例と反比例」p.9 参照)。

   この関係を分かりやすくするために、例えば、最初に止まっていた物体を考えましょう。この関係よれば、一定の力が加わり続けると、その大きさに応じて物体の速さは速くなっていく、ということになります。

2. 速度の変化量と力を加えた時間

   次は、物体の速度の変化量は、力を加えつづけた時間 Δt に比例します。長い時間力を加えつづければ物体の速度は大きく変わりますし、逆に、短い時間であれば速度の変化量は少ないです。

   $$\Delta v \quad \propto \quad \Delta t$$

3. 速度の変化量と質量

   最後に、物体の “重さ” について考えましょう。最初に静止していた物体を動かすことを考えます。経験からも想像できるように、同じ力を加えても “重い” 物は動かしにくく、“軽い” 物は動かしやすいです。物体の “重さ” にあたるものを**質量**といいます。そこで、質量 m に対して、速度の変化量は**反比例**の関係にあります。

   $$\Delta v \quad \propto \quad \frac{1}{m}$$

これら 3 点について、みなさんは実感が湧くでしょうか。あるいは、何らかの違和感があり、「ちょっとどうかな？」と思うでしょうか。おそらくは、素直に当たり前のことと認めてもらえると思います。もしも当たり前だと思ったとしたら、力学の基礎を直感的に理解していることになりますので、その感覚を大切にしてもらいたいと思います。

ここで、今までの結果をまとめてみます。まず気をつけたいのは、上の議論で速度の変化量を考えたとき、一つの要因以外の他の二つの要因は一定であるとしたことです。つまり、力の大きさを変えて考えるときには、力が作用している時間のや質量は変化させないで考えました。これらを一斉に変更すると訳が分からなくなるからです。この点に気をつけて、結局、速度の変化 Δv が何によって変化するのかを考えると、次のようにまとめられることが分かります。

$$\Delta v \quad \propto \quad \frac{F\Delta t}{m}$$

実際、Δt と m を固定した値とするとき、速度の変化 Δv は力の大きさ F に比例しています。F と m を固定すれば、Δv は Δt に比例します。F と Δt を固定すれば、$1/m$ に比例します。こうして今までの性質をうまくまとめることができました。この関係は両辺に $\frac{m}{\Delta t}$ を掛けて

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \propto \quad F \tag{3.3}$$

と書いても同じことです。

ここで、力 F が、時々刻々変化する場合を考えると、あらゆる瞬間についてこのような式が成り立つと考えるべきです。そこで、Δ がついた量については、Δt がゼロに近づいた極限で考えるべきだということになります。つまり、微分することを考えましょう。

$$m \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt} \quad \propto \quad F$$

力の向きについて考えます。まず、力の向きと速度の向きとは、必ずしも一致しないことに注意しましょう。例えば、みなさんが走っているときに横から軽くドンと押された場合を考えましょう。みなさんは、少し走り方が横にぶれるかもしれません。しかし、速度は依然としてほとんどまっすぐであって、押された向きとは異なります。一方、静止した物体に力を加えると、加わった力の向きに物体は進み始めます。そこで、力の向きは加速度の向きと一致しすると考えられます。上の関係式を、向きも含めてベクトルで表現すると、次のようになります。

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \;=\; m\boldsymbol{a} \quad \propto \quad \boldsymbol{F}$$

ここに示された関係は、次の節 (3.7 節) で**運動方程式** として定式化されます。

作用反作用の法則

最後に力の性質について重要な点をつけ加えます。力は孤独ではなく、必ず相方がいることが分かっています。物体 A が物体 B に力を及ぼすとき、逆に、物体 B も物体 A に力を及ぼしています。それだけでなく、その二つの力は大きさが同じで向きが逆です。例えば、重いボールを持っている人が、足を動かさないままでボールを投げることを考えましょう。ボールは人からの力を受けて運動を始めます。つまり、加速度を得ます。しかし、ボールを投げると、その人はわずかですが後ろに反り返ります。それは、ボールがその人を押し返しているからです。また、先ほどの、走っている人を横から別の人が押す例では、体重にもよるものの、押した人は押した反動で少し後ろに下がるはずです。走っている人は、意識しないでも押した人に同じ大きさの力を与えているからです。ひとつの力 (これを**作用**といいます。) に対して、対 (つい) になって現れる力を**反作用**といいます。また、このように二つの力が対になって現れることを**作用反作用の法則**といいます。

まとめ

これまで述べてきたニュートンの**運動の法則**を以下にまとめます。このテキストの範囲で、というだけではなく、物理学でもっとも基礎的で重要な法則ですから、是非、十分に理解するようにしてください。

法則：運動の法則

- 第一法則 (慣性の法則)

  物体に力が作用していなければ、その物体は静止し続けるか、あるいは、等速直線運動を続ける。

- 第二法則 (**運動方程式**)

  物体に力が作用するとき、その物体の加速度の大きさは物体に加えられた力の大きさに**比例**し、物体の質量に**反比例**する。加速度の向きは加えられた力の向きに一致する。

- 第三法則 (作用反作用の法則)

  一つの物体 A が他の物体 B に力を及ぼすとき、B も A に力を及ぼす。これらの力は (二つの物体を結ぶ直線上に作用し)[*] 、大きさが同じで向きが逆である。

[*] 括弧内の表現を含める場合と含めない場合があります。ニュートン自身は含めなかったようです。これについては、3.15 節で改めて考えます。

3.7　力の単位

ここで、少し話が脱線します。第二法則に関連して、力の単位について説明しておかなければなりません。

加速度の単位

単位は物理量同士の計算と密接に関係しています。例えば、 $5[\mathrm{m}]+3[\mathrm{kg}]$ という計算は意味がありません。異なる単位の物理量同士を、足し算 (+)・引き算 (-) することはできません。足し算や引き算を行うときは、同じ単位の物理量でなければなりません。

では、掛け算 (×) や割り算 (÷) はどうでしょうか。例えば、速さや速度は、移動距離をかかった時間で割ることで得られます。例えば、100[m] を 9.68[s] かかったとすると、その速さは次のように計算されます。

$$\frac{100[\mathrm{m}]}{9.68[\mathrm{s}]}=10.33[\mathrm{m/s}]$$

物理量の掛け算や割り算を行う場合には、数値だけでなく、単位についても同じような計算をすることを思いだしましょう。そして、一つの単位系では、物理量の定義によって、または、物理法則によって関連づけられた式で、計算が成り立つように単位が決められています。

そこで、**加速度**の単位を考えてみましょう。加速度は、速度の時間変化の割合を表す量です。例えば、2 秒間にある方向の速度が 2[m/s] から 20[m/s] になったとします。そのときの加速度は、$\frac{20[\mathrm{m/s}]-2[\mathrm{m/s}]}{2[\mathrm{s}]}$ と計算できます。したがって、次の式によって、加速度の単位は $[\mathrm{m/s^2}]$ とすればいいことが分かります。

$$\frac{20[\mathrm{m/s}]-2[\mathrm{m/s}]}{2[\mathrm{s}]} \quad = \quad 9[\mathrm{m/s^2}]$$

力の単位

今度は力の**単位**について考えてみます。そのために、もう一度ニュートンの運動の法則の第二法則をここで書いてみましょう。

$$m\frac{dv}{dt} \quad \propto \quad F$$

この式は、単に両者が比例していることを表しているだけです。「比例している」というだけでは、大変使いづらい式になってしまいますので、比例定数をつけて等式にしてみましょう。

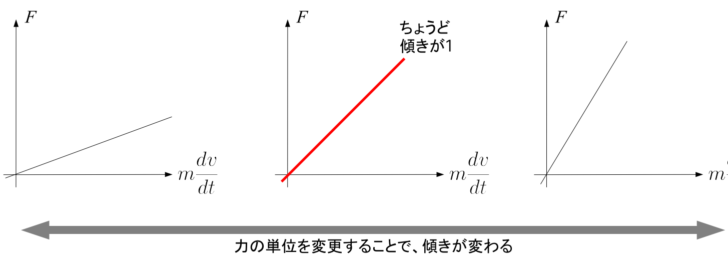


図 3.16: 力の単位と比例定数

$$m\frac{dv}{dt} \quad = \quad CF \tag{3.4}$$

ここで C は何らかの**比例定数**です。

さて、ある大きさの力を考えたとき、単位を変更することは、数値を変更することになります。例えば、100 万円という金額に対して、これを 1 ドル=100 円としてドルで表すと、1 万ドルということになります。この例のように、同じものを、単位を変えて表すと、定数倍変更することになります。力についても同様で、力の単位を変えることで、力の数値は定数倍変わります。そこで、うまく単位を決めることによって、先ほどの定数 C をちょうど 1 にすることができるはずです。

それでは、丁度、傾きが 1 になるようにするためには、力にどのような単位を用いれば、いいでしょうか。それは、式 (3.4) の左辺の単位を考えて、「1[kg] の物体を加速度 $1[\mathrm{m/s^2}]$ で加速させるのに必要な力」の数値が 1 になるようにすればいいことに気づきます。当然、「2[kg] の物体を加速度 $1[\mathrm{m/s^2}]$ で加速させるのに必要な力」や「1[kg] の物体を加速度 $2[\mathrm{m/s^2}]$ で加速させるのに必要な力」の数値は 2 となります。そうするためには、

$$\left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2}}\right]$$

を力の単位とすればいい訳です。このようにして力の単位を決めることができます。

この単位は、ややごちゃごちゃしています。そこで、表記を簡単にするために、力の単位を一つの記号 N (**ニュートン**) で表します。運動の法則を打ち立てたニュートンにちなんだ名前のつけ方であることは言うまでもありません。

$$[\mathrm{N}] \quad = \quad \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

このように単位を決めることで、ニュートンの運動の第二法則は、次のような方程式の形で表すことができるようになります。

$$\boldsymbol{F} \quad = \quad m\boldsymbol{a}$$

これを**運動方程式**といいます。

これからもいくつかの物理量の定義や物理法則が現れます。そして、それに応じて SI にとって自然な単位も現れます。数値だけでなく、単位についても定義や物理法則に沿った計算をすれば単位も計算できるので、今後は気をつけてみていてください。

考えてみよう：力の単位

この後、いくつかの種類の力を学んでいきます。そのときには比例定数が現れることが多いです。この比例定数を１としたとき、力の単位はどのように変わるでしょうか。たとえば、**万有引力定数** (3.11 節) が１であるとしたとき、力の単位はどう変わるでしょうか。また、運動方程式にはどのような比例定数が現れてくるでしょうか。考えてみましょう。

3.8 加速度と速度と位置

これまで、運動を表現するためにベクトルを学び、その時間変化を考えるために微分法について学びました。そして運動の法則にたどり着き、単位についての学習を踏まえて、運動方程式を定式化しました。こうして導かれた運動方程式は、物理学の中でもっとも重要な法則の一つです。ここでは、運動方程式がどのような意味で重要なのかを考えます。

運動方程式は、力が分かれば加速度が分かることを教えています。それでは、加速度が分かると何かメリットがあるのでしょうか。微分法で学んだことをもう一度思い返してみましょう。t の関数である速度 $v(t)$ が与えられると、$\frac{dv}{dt}$ すなわち加速度 a を求めることができました。

この逆の問題を考えてみましょう。すなわち、各点での加速度 (速度のグラフの傾き) $\frac{dv}{dt}$ が与えられたとき、もとの関数 $v(t)$ を復元できるか、という問題です。

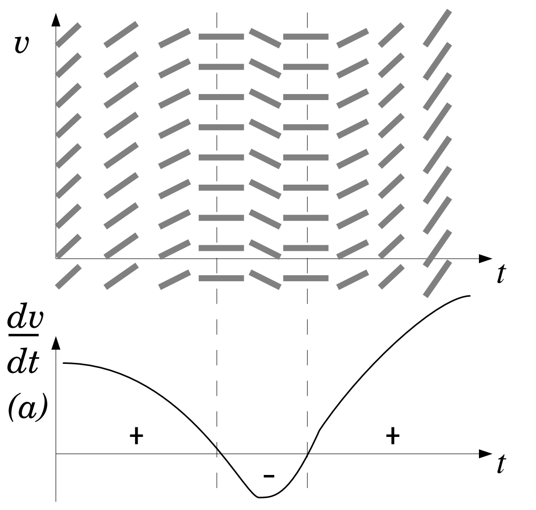


図 3.17: $v(t)$ の導関数が与えられていること

図 3.17 の下は加速度 $a = \frac{dv}{dt}$ の時間変化のグラフです。時刻 t に応じた速度 $v(t)$ のグラフの傾きを示しています。これをもとに、$v(t)$ のグラフを上に描いてみましょう。その準備として、下の図で与えられた傾きを短い線分で表し、上のグラフに描きこみます。下のグラフの値の大小に応じて、上の図中の線分の傾きが変化していることを確かめてください。速度のグラフを表す $v(t)$ の曲線がグラフの中のどこを通るか分からないので、線分はたくさん描いてありますが、縦軸に沿って同じ傾きの線分が並んでいることがわかります。時刻 t の値に応じて傾きが決まっているので、時刻が同じなら傾きは同じだからです。この図を見ると、元のグラフが復元できそうに見えます。しかし、問題点もあります。ある一つの $v(t)$ の曲線を描いたとしましょう。それを縦軸方向に平行移動しても傾き ($\frac{dv}{dt}$) は同じです。そこで、$\frac{dv}{dt}$ を決めたとしても、$v(t)$ を表す曲線は縦軸方向の位置を決めることができず、いろいろな $v(t)$ が答えとしてありえます。

これを一通りに決めるためには、例えば、$t=0$ の時の値 $v(0)$ を決めればよさそうです (図 3.18 の×印)。この点を通りながら、$\frac{dv}{dt}$ で与えられた傾きに一致するような $v(t)$ の曲線を描いてみると、一通りに決まりそうです (図 3.18)。

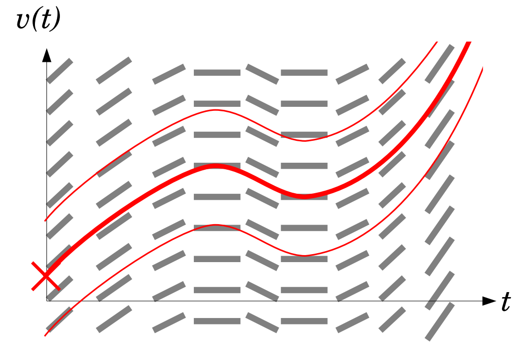


図 3.18: 各点での傾きから $v(t)$ を決める

このように、微分することとは逆に、傾き (微分係数あるいは導関数) が与えられたときに元の関数を特定することを一般に**積分**するといいます。また、求められた関数を元の関数の積分 (特に不定積分) といいます。上の例で分かったように、積分する際に、得られる関数を一通りに決めるためには、ある時刻の値を与えることが必要です。通常は $t=0$ での値を与えることが多いです。$t=0$ での値を**初期値**といいます。

加速度 a は速度 v を時刻 t で微分したものです。そこで、加速度 a が与えられた場合、速度 v の初期値が分かれば、加速度 a を時刻 t で積分することで速度 v が分かることになります。同様に、速度 v は位置 x を時刻 t で微分したものです。そこで、速度 v が与えられた場合、位置 x の初期値が分かれば、速度 v を時刻 t で積分するで位置 x が分かることになります。

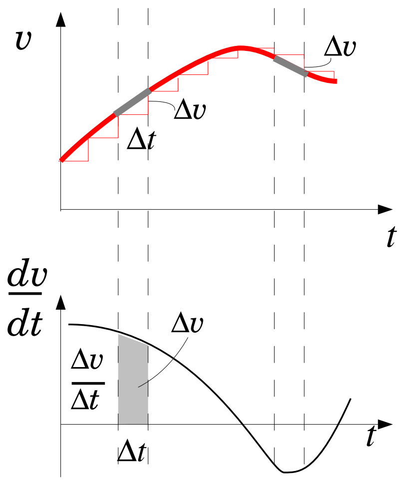
学びの Tips：微分方程式

質量と力が分かっているときに、位置 (あるいは速度) を運動方程式から求める問題が典型的な力学の問題です。

ところが、**運動方程式**中には、位置や速度を時間で微分したものである加速度が含まれています。運動方程式のように、求めたい関数 (位置や速度) を微分したもの (加速度) を含む方程式を、数学的には**微分方程式**といいます。微分方程式を解いて位置あるいは速度を時間の関数として求めることが、力学の典型的な問題であるということです。

学びの Tips：積分は面積を求めること

積分することは面積を求めることだ、と教わった人もいるかもしれません。ここでは積分と面積の関係について考えてみましょう。
加速度のグラフ (左図の下のグラフ) で、微小な時間間隔 Δt をとったとき、その時刻の加速度がおおまかには $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ であることから、その間で生じる速度の変化 Δv は $\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta t} \times \Delta t$ と表されます。これは図でハッチをかけた部分の面積に当たります。その面積が上の図の Δv になる訳です。これをいろいろな t の値で同様のことを考えると、下のグラフの面積は、上のグラフの値そのもの、という訳ではなく、変化量の合計となることが分かります。そこで時刻 $t=0$ に値がゼロであれば (原点を通るグラフであれば)、面積と一致することになります。



このようにして、物体に作用する力と初期値 (物体の速度と位置の初期値) が分かっているならば、運動方程式によって、物体の未来の位置と速度を決定することができる訳です。

運動方程式による未来予測

ここで扱ったニュートンの運動の法則は、力学と呼ばれる分野の核心部分です。特に、運動方程式は重要です。運動方程式が意味しているところを考えてみましょう。

まず、ある質量を持った物体に作用する力が分かっているとしましょう。力は、普通、物体間で作用します。具体的に、物体に作用する力は、万有引力や、電気・磁気の力です。これらは、何がどこにあるか、また、どのように運動しているか、で決まってしまいます。これについては 3.11 節, 4 章 などで学びます。ですから、最初に物体に作用する力が分かると考えることは、自然なことです。

さて、力が分かると、運動方程式によって加速度が分かります。加速度は、速度の時間変化の割合ですから、速度がどう変化するかが分かります。これに初期の速度を考え合わせると、次の時刻の速度を決定できます。加速

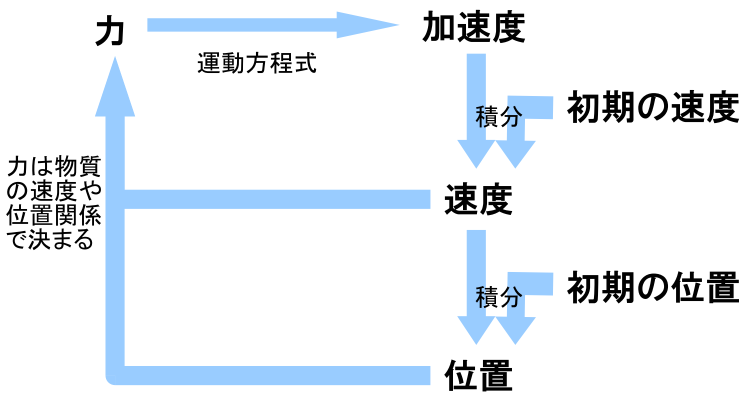


図 3.19: ラプラスの悪魔の考え方に基づく世界の時間発展

度を積分することで速度が分かる訳です。同様に速度は位置の時間変化の割合ですから、初期の位置が分かれば、積分できて、次の時刻の位置が分かります。このようにして、力と初期の位置と速度が分かれば、次の瞬間の物体の位置と速度が決まってしまいます。

ところが、いろいろな物体の位置関係や速度が決定すると、各物体に作用する力が決まります。力の多くは物体の位置関係で決まるからです。力が分かったので、再び、同様の操作を行うことによって、更に次の瞬間の位置と速度が決まります。これと同様の操作を何度も何度も繰り返せば、次々と先の時刻の物体の位置や速度を決定できます (図 3.19)。運動方程式の発見は、未来を予知する能力を人間が手に入れた、とも言えます。

ラプラスの悪魔

これをさらに突き詰めて考えてみましょう。

世の中にある物質は、**分子**や**原子** * といった細かな粒子でできています。それは、私達の体や脳も含みます。そうした粒子の運動は、上に述べたように、運動方程式によって決まっていて、現在の状態が決まると、未来の状態も決まってしまいます。ということは、未来は決まっているということになります。そして、もしも宇宙の中の全ての粒子の位置と速度を知ることができて、無限の計算能力を持った者 (これを**ラプラスの悪魔**あるいは**ラプラスの魔**と呼んでいます。) がいたとしたら、その者は、全ての未来の出来事を予知していることになります。

この考えは、いろいろな意味で否定されています。それについては 6.6 節でも簡単に触れます。しかし、逆に、これを根拠に人間は未来を予測します。例えば、人間は、天気予報をできると信じています。大気を構成する粒子が決まった法則に基づいて運動していると知っているからです。原理的には、現在の状態を知れば未来が決まることを知っているからです。実際には、観測によって得たデータを、運動方程式に基づくソフトウエアを使ってスーパーコンピュータで計算し、天気予報を行っています。また、別の例もあります。人間は、構造物 (例えば飛行機) を安全に設計します。物体を構成する粒子が予期しない動きをせずに、決まった動きをすることを知っているので、それを前提にして、考えうる状況で安全なものを設計することができる訳です。このような意味で、やはり、人間は将来が予想できるものであるということ前提に活動していると言えます。そして、その能力を活用することによって、これからも、未来を切り開こうとしているのです。

* 原子については、「学びの Tips:原子」(p.54) を参照してください。

3.9　等速直線運動

運動方程式を含む、ニュートンの運動の法則は、力学の最も中心的な部分です。運動の法則にたどり着くまでに単位やベクトルや微分を勉強してきました。せっかくたどり着いたので、運動の法則を応用することを考えます。このテキストの力学の残りの話題は、ニュートンの運動の法則の応用です。以下では、運動方程式を適用する運動の例として、三つの例を扱います。力が作用しない物体の運動、作用する力が一定であるような物体の運動、等速円運動の三つのケースについて考えてみます。

最初は、**等速直線運動**です。等速直線運動については既に学びました。しかし、ここでは改めて、運動方程式に関連づけて見直してみましょう。

ここで、言葉に気をつけてみます。「等速直線運動」とは、一定の速さで直線上を運動することです。これは、「等速度」で運動していることを意味しています。速度をベクトルとして考えれば、等速度とは、一定の**速さ**で、一定の向きを保ちながら進むことを意味します。正しく、速度が一定ということです。そこで、「等速度運動」と表現してもよさそうです。「等速度運動」とはあまり言わずに「等速直線運動」と表現するのは、表現としてはくどくなるのもの、その方が誤解が少ないからだと思います。

さて、速度が一定であるということは、速度の時間変化がない、つまり、速度の時間についての微分係数である加速度がゼロであることを意味します。これを運動方程式に当てはめてみましょう。

$$(\text{力}) \quad = \quad (\text{質量}) \times 0$$

これから、等速直線運動をするときには作用する力がゼロであることが分かります。逆に、力がゼロであるならば、物体は等速直線運動をします。これは**慣性の法則**同じ内容になります。

考えてみよう：慣性の法則は必要か

ここで、もう一度、ニュートンによる運動の法則のうちの第一法則 (慣性の法則) について考えてみましょう。第二法則 (運動方程式) で、力がゼロであるならば、ここで考えてみたように、実質的に第一法則と同じになってしまいます。第一法則が第二法則の特別なケースを述べているだけだとすると、第一法則は不要ではないか、と思われます。皆さんはどう考えるでしょうか。

気をつけておきたいのは、後で学ぶ**万有引力**があるために、実際には、ある物体に力が作用していない状況というのはありえない、ということです。では、ありえない状況での運動を仮定することにどんな意味があるのでしょうか。これについては議論があるところです。一般的には、「力が作用しない仮想的な物体が、等速直線運動するような (慣性の法則が成り立つような) 座標系 (**慣性系**といいます。) が存在する」ということを仮定しているのであると解釈されています。短く表現すれば、これは法則ではなく、慣性系の定義を与えているのであると言えるでしょう。

3.10　等加速度運動

二番目は、**重力**だけが作用する場合の物体の運動についてです。地表面付近ではどんな物体も重力を受けます。では、重力にはどのような性質があるでしょうか。重力は力 (ベクトル) なので、向きと大きさについての特徴をみましょう。

法則：重力についての法則

作用する向き

鉛直方向下向き

大きさ

(質量) × (重力加速度)

※ **重力加速度**は、定数と考えます。場所や高度によって若干違うものの、地表面では概ね 9.8 [$\mathrm{m/s^2}$] 程度です。

学びの Tips：鉛直と垂直

みなさんは「**鉛直**」という言葉と「垂直」という言葉と、どちらも聞いたことがあると思います。それでは、これらはどのように違うでしょうか。

「鉛直方向」は「重力の作用する向き」のことです。私たちが日常生活で上とか下とか表現しているのは、重力の方向を基準にしています。(そのような意味では、重力の作用する向きを「鉛直方向下向き」と表現するのは、意味のない表現であるとも言えます。) 一方で、「垂直」とは二つのものの関係についての言葉です。二つのものが直角に交わる関係であるときに「垂直」と表現しています。

これを混同している人も多いので気をつけましょう。一般に基礎的な言葉の意味をしっかり理解しておかないと先に話は進みません。曖昧だと思った言葉はしっかり復習しておきましょう。例えば、「水平」と「平行」についてしっかり区別できているでしょうか。

重力だけが作用する場合の物体の運動は**自由落下**といいます[4]。自由落下の性質を調べるために、これを運動方程式に当てはめてみましょう。ここでは、鉛直方向の 1 次元で、下向きを正として考えます。運動方程式は、

$$\begin{array}{ccccc} (\text{力}) & & (\text{質量}) & & (\text{加速度}) \\ F & = & m & \times & a \end{array} \tag{3.5}$$

でした。左辺に重力を当てはめます。すると、次のようになります。

$$\begin{array}{ccccccc} (\text{質量}) & & (\text{重力加速度}) & & (\text{質量}) & & (\text{加速度}) \\ m & \times & g & = & m & \times & a \end{array} \tag{3.6}$$

ここで、両辺を質量 m で割ると、

$$\begin{array}{ccc} (\text{重力加速度}) & & (\text{加速度}) \\ g & = & a \end{array} \tag{3.7}$$

となります。この結果は、加速度が時間変化せずに一定であることを意味しています。加速度が一定であるような運動を**等加速度運動**といいます。自由落下は等加速度運動です。上で示したように、自由落下の加速度 a は質量に関係なく一定値 g になります。つまり、自由落下の場合には、どんな物体でも、質量が大きかろうが、小さかろうが、同じ一定の加速度 (重力加速度) で運動するのです。

学びの Tips：数式とその意味

ここまでの説明で、重力中ではどのような物体も、加速度が重力加速度 g であるような運動をすることが分かりました。ここで行った式の変形を言葉で表現してみましょう。すると、次のようになります。

> 運動方程式 (3.5 式) から「重い」ものは速度を変えにくい。また、重力の性質 (「重力についての法則」参照) から、「重い」ものほど重力が大きい。その割合がどちらも同じなので、どんな「重さ」のものでも同じ加速度で落下する (3.7 式)。

ここで、この言葉による説明が、式の変形 (特に両辺から質量を消去したこと) に対応していることを確かめてください。以降、数式とその変形が出てきたら、その意味を考える習慣を身につけてほしいと思います。そして、言葉で説明するよりも、数式で表現する方が簡単だと気づいてもらえたらいいと思います。

それでは、具体的に加速度が一定の場合の運動の様子はどうなるでしょうか。鉛直方向に沿った 1 次元の運動を考えてみましょう。まず、加速度のグラフを考えてみます。ここでは向きも考えることにします。通常、鉛直上向きに座標軸のプラスの向きを選びます。そこで、力は鉛直下向きですから、加速度も負の値になります。加速度が時間的に変化しない様子をグラフから読み取って下さい (図 3.20 下)。

次に速度を考えます。加速度が負で一定ですから、速度は傾きが負で一定の直線になります。前にも書きましたが、加速度が与えられていても、速度の初期値が与えられないと速度は決まりません。そこで、**初速** (速度の初期値) が正である場合を考えます。すると、速度の時間変化は図 3.20 の中段のグラフのようになります。傾きが負で一定であることに気をつけてください。この場合、初期に速度は正でした。これは、物体が初期には上向きに運動している (投げ上げられた) ことを意味しています。その後、重力によって負の加速度があるために、速度はどんどん減少し、やがて $t = t_*$ で速度ゼロになります。速度がゼロになる時刻までは上昇して、それ以降は下降する訳ですから、その瞬間に最高の高さに達します。下降するときには速さがどんどん大きくなっていきます。

それでは、位置もグラフにしてみましょう。同様に、位置の初期値を与えなければなりませんから、これを適当に与えます。すると、図 3.20 上のようなグラフが得られます。上昇しながら、徐々に上向きの速度が減少し、$t = t_*$ で最高点に達した後、落下しはじめます。

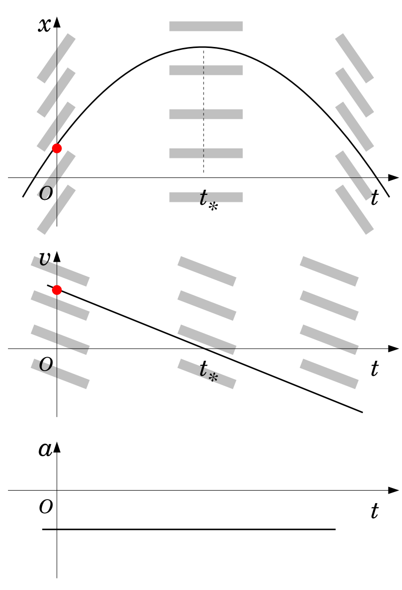


図 3.20: 自由落下のグラフ (上：位置, 中：速度, 下：加速度)

[4] 特に**初速**がゼロであるときだけ自由落下ということもあります

ここで行ったことをまとめてみます。重力の性質を運動方程式に当てはめた結果、加速度が一定 (図 3.20 下) であることを表す**微分方程式**

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

を得ました。この微分方程式を速度の初期値を使って 1 回積分して速度の時間変化が分かりました (図 3.20 中)。これに位置の初期値を与えて、もう一度積分することで位置の時間変化が分かりました (図 3.20 上)。このような操作を行った結果、物体の運動の様子が分かりました。「物体の運動を予言できた」と言ってもいいでしょう。等速直線運動と等加速度運動は簡単な例でしたので、実感がわかないかもしれません。しかし、力学の中心的なテーマである物体の運動を調べることが、このように行われているのだ、ということを、ここで分かってもらいたいと思います。

学びの Tips：ガリレオの落体の研究

ガリレオ・ガリレイは物体の落下について研究し、重力による物体の落下は質量の大小に無関係であることを示しました。もう一度繰り返します。物体の落下の様子は、質量の大小にかかわりません。私たちの中には、重いものほど速く落ちるという固定概念を持つ人もいるでしょう。実際に鳥の羽根が鉄の玉よりも遅く落ちるのは、空気の抵抗があるからです。一般に空気抵抗があると速さが増えにくくなり、やがて一定の速さで落下するようになります。羽根の場合には、すぐにそのようになってしまって、ゆっくり落ちるのです。

ガリレオは、ピサの斜塔で鉄球と木の玉を落下させて同時に落ちることを示したと言われています。実は、このときも、実際には木の玉が遅れて落下したと言われています。そしてその原因は空気があるためであると指摘したと言われています。ガリレオは、思考実験で同時に落ちると見破った訳です。

また、ガリレオは、次のような理論展開をしています。例えば二つの物体があって、それらを紐で結ぶことを考えます。すると、物体の質量は増えます。このとき、この物体は質量が大きくなったために、速く落ちるようになるでしょうか。どうも、そのようには思われません。

重いものほど速く落ちる、という考えは、あまりに日常的であるので、常識として私たちの頭の中に染みついています。また、古代ギリシアの哲学者アリストテレスの理論も重いものほど速く落ちるとしています。そこで、ガリレオがこの考え方を否定するのは、想像を越える困難があったに違いありません。

今日では、様々な実験でガリレオの主張が正しいことを確かめることができます。アポロ 15 号で月面に到着した宇宙飛行士が、ハンマーと羽根を落とし、同時に月面に落ちることを確かめたのは有名な話です。

考えてみよう：特撮映画での物の壊れ方

自由落下が示していることは、重かろうが、軽かろうが、大きかろうが小さかろうが、空気の抵抗を無視できれば、同じように落下するということです。そのため、落下する距離が長ければ長い程、落下する時間は長くなります。

ウルトラマンなどの特撮映画や特撮番組 (そしてガンダムなどの SF アニメ) では、巨大な構造物が出てきます。そして、それらはしばしば破壊されます。例えばウルトラセブンが建物に激突して建物が壊れるシーンがあります。そのようなとき、スローモーションで映し出されることが多いです。それはなぜでしょうか。

セブンには実は人間が入って撮影していますから、実際にセブンが破壊する建物は、人間程度の大きさしかありません。ところが、ここまでで述べたように、長い距離を落下するのには長い時間がかかります。そのため、巨大構造物が崩落するのにかかる時間は、人間程度のミニチュアが崩落するのにかかる時間よりもずっと長いのです。そこで、セブンが壊した建物は、ゆっくり崩落するように見せる必要があります。そうでないと、いかにもミニチュアが壊れているように見えてしまいます。特撮映画では経験を基にして、そのような工夫をしてきました。

一方、見る側の私たちのことを考えてみましょう。特撮でそのような工夫をすることによって、大きな構造物が壊れているように感じるのはなぜでしょうか。それは、私たちが日常の経験から自然とそのような感覚を身につけているからではないでしょうか。私たちは自然と物理法則を無意識のうちに体得していた、と言えます。

学びの Tips：重さ (あるいは重量) と質量

みなさんは体重を計るときにどのようにするでしょうか。普通、体重計にのります。これは、実は、体の「**質量**」(動かしにくさ) を計測しているのではなく、体に作用する「重力の大きさ」を計測しているのです。この重力の大き

さを、私たちは通常、「**重さ** (あるいは重量)」と言っています。重力の性質として、その大きさは質量に比例するので、重力の大きさを計測すれば、質量が分かります。このように、私達の日常生活では重力加速度が変わらないので、「質量」も「重さ」同じようなものと考えていいと思います。

ところが、重力加速度は場所によって多少異なります。例えば、北海道では値が大きく、沖縄では値が小さいです。そこで、同じ体重の人が沖縄に行くと、体重計の指す値は少なめになるはずです。(実際には、沖縄と北海道と、それぞれ別に調整された体重計を使うことで対処しています。)

更に、国際宇宙ステーションに行った場合を想像してみましょう。国際宇宙ステーションで体重計にのっても、その指す目盛の値はゼロです。つまり重さはゼロになります。ところが、実際に体重 (質量) がゼロになった訳ではありません。国際宇宙ステーションでも、宇宙飛行士の健康管理のために、体重を計りますが、それでは、どのように計測しているのでしょうか。実際には、宇宙飛行士が体重を計る際には、バネのついた装置につかまり、振動することで体重を計ります。質量が大きいとゆっくり動き、質量が小さいと早く動くので、質量を決めることができるのです。

3.11　等速円運動

三つ目（最後の）応用例は、**等速円運動**です。等速円運動は、円周上を一定の速さで回る運動です。

等速円運動の速度

等速円運動は、**軌跡**が円形で**速さ**が一定の運動です。しかし、**速度**は一定ではありません。速度ベクトルについて説明した p.25 の図 3.14 を思い出しながら、図 3.21 の左側の図を見てください。図では、等速円運動をしている物体の位置を一定の時間間隔ごとに大きめの点 (・) で表し、軌跡 (円周) を線で描いています。この時間間隔での位置の変化 (変位) を円周上の点を結ぶ赤いベクトルで描いてみました。時間間隔を無限に細かくすると、変位ベクトルの向きは速度ベクトルと一致し、円周に沿った方向になります。そこで、速度ベクトルの向きは時間変化し、速度が一定ではないことが分かります。

等速円運動の速さ v について考えてみます。軌道半径 (軌跡の円の半径) を r とすると、円周の長さは $2\pi \times r$ です。円周を 1 回転する時間 (これを**周期**といいます。) を T とすると、円周の長さを 1 周する時間が周期であることから、次の式が成り立ちます。

$$(\text{速さ}) = \frac{2\pi \times (\text{軌道半径})}{(\text{周期})}$$

$$v = \frac{2\pi \times \ r}{T} \qquad (3.8)$$

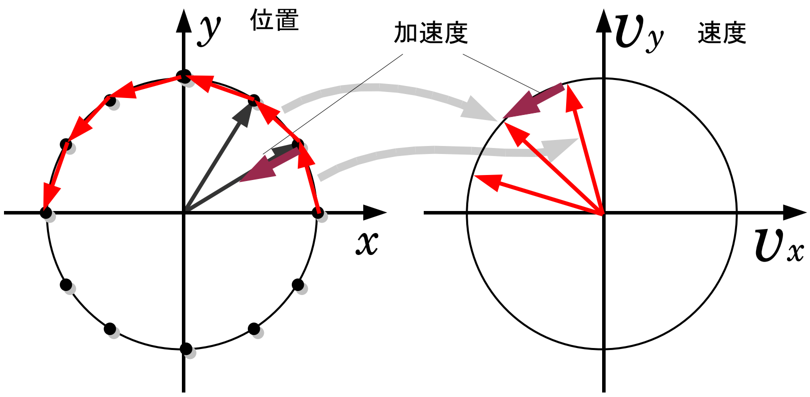


図 3.21: 等速円運動

等速円運動の加速度の向き

このとき、加速度はどうなるでしょうか。速さが一定なので加速度はゼロでしょうか。ここで、速度はベクトルなので、大きさと向きを持つことを思い出しましょう。速さが一定でも、向きが変われば加速度はゼロではありません。では、等速円運動の加速度はどのようなものでしょうか。

それを考えるために、速度ベクトルの始点を原点に揃えて、いろいろな時刻の速度ベクトルを描き直してみます (図 3.21 右)。ただし、近似的に、先ほどの変位ベクトルを速度ベクトルとして描いています。また、ベクトルは平行移動しても同じであることを思いだしましょう。「等速円運動」ですから、速さ (速度ベクトルの大きさ) は同じで、その向きだけが時間変化することに気をつけてください。等速円運動によって位置が 1 周して元に戻ると、速度ベクトルも、1 周して同じ速度ベクトルに戻ります。こうしたことを考えると、速度ベクトル自身が、まるで等速円運動の位置ベクトルと同じように、円を描いて変化することが分かります。

加速度ベクトルの向きを考えるためには図 3.21 の左右の図の対応関係を考えると便利です。位置ベクトルを時刻で微分して得られる速度ベクトルは、位置ベクトルが描く円周に沿った方向でした (図 3.21 左)。そこで、速度ベクトルを時刻で微分して得られる加速度ベクトルは、速度ベクトルの描く円の接線方向であることが予想されます (図 3.21 右)。こうして分かった加速度ベクトルの向きを、仮想的な速度ベクトルの平面 (右側の図) から、現実の物体の運動の様子を表した平面 (左側の図) へ戻して考えてみます。時刻の対応を考えながら、位置ベクトルの図に加速度ベクトルを描き入れると、加速度ベクトルは中心向きであることが予想されます。実際、時間間隔をどんどん短くすると、加速度ベクトルはぴったり中心に向くようになります。

これは意外なことのように思うかもしれません。しかし、よく考えてみると当り前であるとも言えます。例えば、ボールに糸をつけてクルクル回して、ほとんど等速円運動を行うようにさせることができます。このとき、ボールに作用している力は何でしょうか。それは、糸の引っ張る力 (**張力**) です (実際にはもちろん重力による影響もありますが)。糸は、糸が張っている方向にだけしか力を及ぼすことができません。そこで、糸につながれたボールが等速円運動をしているとき、ボールは糸から常に中心向きの力を受けています。ということは、運動方程式に従って考えると、加速度も中心向きであるはずです。このように等速円運動している物体に作用する力は、運動方程式の観点からも中心向きであると確認できました。等速円運動を維持するために必要なこの力は、中心向きなので**向心力**といいます。向心力は、いわば、力の総称であって、具体的には張力や後ほど述べる万有引力などが実際の力です。

法則：糸の張力

作用する向き

糸の互いに引き合う向き。

大きさ

糸が張っている間は、運動に応じてその大きさが決まる。糸が張っていない間はゼロとなる。

※ここでは法則として扱っていますが、実際には糸に作用する力をこのように近似的に扱う、という約束です。そして、この約束に従って話を進めてもあまり困らないので、そうする習慣があるということです。

等速円運動の加速度の大きさ

今度は等速円運動の加速度の大きさ (これを a とします。) を考えてみましょう。このときも、図 3.21 の左右の対応関係を考えると便利です。位置ベクトル (大きさ r) を微分して得られた速度ベクトルの大きさ v が $\frac{2\pi r}{T}$ でした。対応関係を考えて、r を v に v を a に対応させると、加速度の大きさ a は次のように表されると予想されます。

$$\begin{aligned} (\text{加速度の大きさ}) &= \frac{2\pi \times (\text{速さ})}{(\text{周期})} \\ a &= \frac{2\pi \times \quad v}{T} \qquad (3.9) \end{aligned}$$

ここでは図形的に考えてみました。ここでは扱いませんが、数学的な方法でも同じ結論が得られます。

ただし、加速度の大きさ a は、いくつかの方法で表すことができるので、それもここで調べておきましょう。式 (3.9) では、a を v と T で表していました。これを v を使わずに、r と T で表すにはどうしたらいいでしょうか。それには、式 (3.9) の v に式 (3.8) を代入し、v を消去すればいいのです。

$$a = \frac{2\pi \times \frac{2\pi \times r}{T}}{T} = \frac{4\pi^2 \times r}{T^2} \qquad (3.10)$$

式 (3.10) は、同じ軌道半径ならば周期が短いほど、同じ周期なら軌道半径が大きいほど、加速度が大きくなることを表しています。同様に式 (3.9) から式 (3.8) を用いて T を消去することで、加速度の大きさ a を r と v で表すことができます。

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (3.11)$$

この導出は課題とします。これら 3 通りの等速円運動の加速度の表現はどれもよく使うので覚えておくと便利です。

等速円運動の向心力の大きさ

等速円運動の向心力の大きさを求めるために、式 (3.10) で表される加速度を運動方程式に当てはめます。今の場合、加速度は中心向きですから、中心向きを正として、力と加速度の大きさだけについて、運動方程式を立ててみます。すると、等速円運動を行う場合の向心力の大きさ F が分かります。

$$\begin{aligned}(\text{力}) &= (\text{質量}) \times \frac{4 \times \pi^2 \times (\text{軌道半径})}{(\text{周期})^2} \\ F &= \quad m \quad \times \frac{4 \quad \pi^2 \qquad r}{T^2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

等速円運動をする場合には、これだけの大きさの何らかの力 (向心力) が必要になります。

学びの Tips：式の中の文字

式の中には物理量を表す文字や単位が入ってくるので混乱を招きがちです。基本的には丁寧に見ることで解決するのでそうしてもらえればいいのです。しかし、いくつかのヒントがあると、より簡単に理解することができるでしょう。ここでは、そのようなヒントを書いてみたいと思います。

- 単位について
  - 単位は立体 (斜体に対して文字を傾けない表し方) を用います。立体の文字は単位だと考えてください。
  - 単位には大文字を用いる場合があります。それは基本的には人名に由来する単位です。
  - 単位は数値に続けて書きます。数値と単位は掛け算で結びついているからです。[ ] で囲うのは本書だけのルールです。数式の中に、演算の順番を変えないように () をつけても問題ないように、[] を書き入れても問題ないはずです。そこで、本書では単位を [ ] で囲っています。
- 物理量を表す文字について
  - 物理量を表す文字は斜体で書きます。
  - 物理量を表す文字の選び方に次のような習慣があります。参考にしてください。

物理量 (変数)	文字	習慣として利用する理由	物理量 (変数)	文字	習慣として利用する理由
位置 (座標)	x	最後の 3 文字 x,y,z の 1 つ	電気量	q	**Q**uantity of electric charge
位置, 半径, 距離	$\boldsymbol{r}$	**R**adius	磁気量	m	**M**agnetic charge
質量	m	**M**ass	電流	I	**I**ntensity
速度	v	**V**elocity	電場	$\boldsymbol{E}$	**E**lectric Field
加速度	a	**A**cceleration	磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	?
力	F	**F**orce	磁束密度	$\boldsymbol{B}$	?
周期	T	**T**ime	物理定数		
角度	θ	?	万有引力定数	G	**G**ravity
角速度	ω	?	真空の誘電率	ε_0	e に対応するギリシア文字
			真空の透磁率	μ_0	m に対応するギリシア文字

学びの Tips：角速度

式 (3.8)、(3.9)、 (3.10) の中には、共通して $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(\text{周期})}$ やその 2 乗が現れました。このように、何度もセットで現れるものは一つの文字で書き表した方が楽です。そこで、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.13}$$

と定義します。ω(オメガ) は、**角速度**と呼ばれています。弧度法では 1 周 360 °を 2π ラジアンと表します。これを 1 周回るのにかかる時間 (周期)T で割ることで、**単位時間** (1[s]) 当たりに進む角度 (単位:ラジアン) を表すことができます。それが ω です。単位時間当たりに進む距離は**速度**でした。速度と似たような考え方であるので、角速度と名前がついても不思議ではありません。

周期の逆数 $1/T$ は、単位時間に回転する回数になります。(例えば周期が 0.1[s] の時には、1 秒間に 10 回転します。) そこで、周期の逆数 $1/T$ は**振動数**です。角速度は、振動数の 2π 倍である、ということもでき、角速度は**角振動数**と呼ばれることもあります (p.73 参照)。

角速度 ω を用いると、速さ v や加速度の大きさ a は、よりコンパクトに表現できます。

$$\begin{aligned}
v &= r\omega &&= (\text{軌道半径}) \times (\text{角速度}) && (3.14)\\
a &= v\omega &&= (\text{速さ}) \times (\text{角速度}) && (3.15)\\
&= r\omega^2 &&= (\text{軌道半径}) \times (\text{角速度})^2 && (3.16)\\
&= \frac{v^2}{r} &&= (\text{速さ}^2)/(\text{軌道半径}) && (3.17)
\end{aligned}$$

万有引力の法則

具体的に興味深い等速円運動の例は、惑星の運動です。これはニュートンが扱った問題でもあります。星の運動を考えるときに最も重要なのは**万有引力**です。万有引力は、全ての物体が互いに互いを引き合っている力です。ニュートンは、運動の法則だけでなく、次のような万有引力についての法則 (**万有引力の法則**) も発見しました。

法則：万有引力の法則

二つの物体の間には次のような力が作用する。

作用する向き

力の作用する向きは二つの物体を結ぶ線に沿った方向。互いに引き合う向き。

大きさ F

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

G ： 万有引力定数, 6.67 $\times 10^{-11}$ [$\mathrm{m^3/kg{\cdot}s^2}$]
M, m ： それぞれ二つの物体の質量 (単位 [kg])
r ： 二つの物体の間の距離 (単位 [m])

ここで、万有引力の大きさとは、どちらの物体に作用する力の大きさであるのか、確認しておきたいと思います。**作用反作用の法則**を思い出して下さい。すると、どちらの物体に作用する力も同じであるということになります。「二つの物体の間に作用する万有引力」といったとき、二つの物体それぞれに、同じ大きさの力が作用するのです。そして、その大きさが上記の $F = G\frac{Mm}{r^2}$ となります。

また、数式が現れた場合には、その意味をじっくり考えてみることを勧めます。万有引力の場合、力の大きさを表す式は、定数 G を除くと、$M \times m$(二つの物体の質量の積) を r^2(物体間の距離の 2 乗) で割ったものに**比例**することを表しています。一つ目のポイントは、物体の質量が大きいほど万有引力の大きさは大きくなるということです (図 3.22 左)。例えば、地球と月の中間にある宇宙船を考えたとしましょう。地球の方が質量が大きいので、宇宙船は地球から受ける力の方が強いです。地球との間の万有引力の大きさと、月との間の万有引力の大きさの比は、丁度、地球と月の質量の比に等しくなります。

二つ目のポイントは、距離の 2 乗で割っていますので、距離が短いほど力が強いということです。例えば、地球から宇宙船が遠ざかることを考えてみましょう。地球の表面では、地球の中心からの距離は (ほぼ) 地球半径に等しいです。地球の表面から地球半径と同じくらい遠ざかったとしましょう。すると、地球の中心からは地球半径の 2 倍 (地球直径分) だけ遠ざかったことになります。遠ざかるにつれて万有引力の大きさは小さくなります。この場合には、1/(地球半径)^2 に対して 1/(2 $\times$地球半径)^2 を考える訳ですから、大きさは 1/4 になる訳です。

このように数式が現れたらその意味するところをじっくり考える習慣をつけてみましょう。

学びの Tips：重力と万有引力

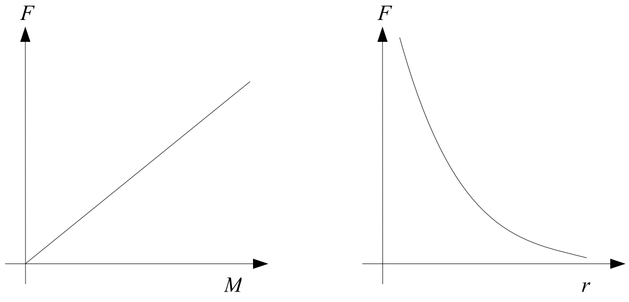


図 3.22: $F = G\frac{Mm}{r^2}$ の M 依存性と r 依存性

この二つの言葉の関係は微妙です。区別して使われることが多いのですが、分野によってその使い分け方が違います。

まず、私たちが学ぶような初歩的な物理学では、地球表面付近で重力加速度を定数として扱う場合に「重力」といい、地球の中心からの距離を考えなければならないような場合は「万有引力」ということが多いようです。

理論物理学の場合にも何となく区別があり、ニュートン力学の範囲では「万有引力」といい、アインシュタインによる**相対性理論**の範囲で扱う場合には「重力」という習慣があるようです。

更に、地球科学の場合には、「万有引力」に地球の自転による遠心力を加えたものを「重力」ということが多く、そのように区別しています。また、地球科学の場合と理論物理学の場合では「**重力波**」という言葉が指し示すものは全然違うものです。

これは非常に困ったことです。物理学も言葉の定義をきちんとしなければいけない学問です。それを考えると、これは情けない話です。でも現在の状況では仕方がないので、学生のみなさんはどんな意味で使われているのか、時々気をつけるようにして下さい。

人工衛星の運動 (運動方程式と万有引力の法則の組み合わせ)

さて、万有引力による等速円運動を考えてみることにしましょう。例えば、地球の周りを**人工衛星**が回ることを考えます。万有引力も作用反作用の法則に従いますから、地球が人工衛星を引きつけるのとの同じ力で、人工衛星が地球を引きつけています。しかし、人工衛星に比べて地球の方が圧倒的に質量が大きいので、地球は人工衛星の周りを回ることなく、ほとんど動きません。それに対して人工衛星は、常に地球の中心を中心に等速円運動を行うとみなせます。そのような場合に、どのようなことが言えるでしょうか。

それを調べるために、運動方程式を立ててみましょう。地球の質量を M, 人工衛星の質量を m として、地球の中心から軌道半径 r のところを速さ v で等速円運動することを考えます。すると、式 (3.12) と万有引力の定義から中心向きの成分についての運動方程式は次のようになります。

$$\begin{aligned} (\text{中心向きの力}) &= (\text{人工衛星の質量}) \times (\text{中心向きの加速度}) \\ G\frac{Mm}{r^2} &= m \times \frac{4\pi^2 r}{T^2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

運動方程式から分かることがいくつかあります。

1. 運動が人工衛星の質量 m によらないこと

   両辺 m で割ることができます。

   $$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

   すると、m が消えてしまいました。つまり、m がどのような値でも同じような運動を行うことが分かります。重力中の運動と同じで、人工衛星の運動は質量に関係ありません。重力のときと同じように「質量が大きいものは動きにくいが、その分大きな万有引力を受けている」ために同じ運動を行います。

2. 周期 T と 軌道半径 r の関係

   両辺に $\frac{r^2}{4\pi^2}$ を掛けてみます。

   $$G\frac{M}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2} \tag{3.19}$$

軌道半径の 3 乗を周期の 2 乗で割ったものが $G\frac{M}{4\pi^2}$ となりました。中心の星 (ここでは地球) を決めれば、これは定数です。つまり、地球を回る人工衛星の軌道半径 r の 3 乗を人工衛星の回転周期 T の 2 乗で割ったものは、どんな人工衛星でも一定であることになります。これは**ケプラーの法則**の第三法則として知られています。

法則：ケプラーの法則の第三法則

ある星を中心に万有引力によって等速円運動する物体について、周期 T の 2 乗は軌道半径 r の 3 乗に比例する。(あるいは r^3/T^2 は定数である。)

考えてみよう：ケプラーの第三法則からのずれ

ニュートン以前の時代、ガリレオとほぼ同時代、ケプラーは惑星の観測結果から太陽からの距離と**周期** (もとの位置に戻るまでの時間) との関係に気づきました。その一つがケプラーの法則の第三法則です。ケプラーの法則では、太陽を中心星として考えます。

次の表は、ケプラーの法則の第三法則が成り立つか、理科年表のデータを基に調べてまとめたものです。(この表で半径は**天文単位**という単位で表されています。天文単位は距離の単位で、地球の軌道半径を単位としたものです。)

惑星	軌道 (長) 半径 [天文単位]	周期 [年]	(軌道半径)^3 ÷ (周期)^2
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1	1	1
火星	1.5237	1.88089	0.9999
木星	5.2026	11.8622	1.0008
土星	9.5549	29.4578	1.0052
天王星	19.2184	84.0223	1.00545
海王星	30.1104	164.774	1.00548

軌道半径の 3 乗を周期の 2 乗で割ると、概ね地球と同じ 1 に近くなります。ところが、表をよく見ると、(軌道半径)^3÷(周期)^2 の値は、内側の惑星は 1 よりも値が微妙に小さく、外側の惑星は概ね値が 1 よりも微妙に大きいです。それはなぜでしょうか。考えてみましょう。

こぼれ話：第一宇宙速度・第二宇宙速度

高い山から水平方向に石を投げると、やがて落下するでしょう。しかし、その投げる速さを大きくすると、次第に落下する地点は遠くに延びていくでしょう。そして、やがて、ある程度の速さに達すると、地球が丸いので、地球の表面をすれすれに回って地球を一周するようになるでしょう。これが人工衛星の基本的な仕組みです。人工衛星は特にエンジンを噴かしたりすることなく、地球の周囲をぐるぐる回っています。

では、地球 (質量 M) が半径 R の完全な球で大気が無いとして、地球表面をすれすれに回る人工衛星の周期 T_1 と速さ V_1 を求めてみましょう。式 (3.19) を用いて、そのときの周期 T_1 を求めることができます。

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$$

ここで、軌道半径 r として地球の半径 R を用いました。式 3.8 を用いることで、この速さ V_1 も求めることができます。

$$V_1 = \frac{2\pi R}{T_1} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

この速さ V_1 はこれよりも遅いとどこかで地表に落ちてしまう速さです。このような速さを**第一宇宙速度**といいます。

地球の場合、第一宇宙速度は $V_1 \simeq 7.9$[km/s] で、そのときの周期 T_1 は $T_1 \simeq 84$[分] です。国際宇宙ステーションも地表に近いところを回っているので、地球を 1 周するのに必要な時間はおよそ 90 分です。

第一宇宙速度の $\sqrt{2}$ 倍の値 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ は、**第二宇宙速度**といわれています。この速度で鉛直上向きに打ち出された物体は、星 (地球) から無限に遠いところまで達することができます。この第二宇宙速度は、**ブラックホール**とも関連しています。ブラックホールでは第二宇宙速度は光速に達しています。もしも地球が同じ質量で半径 8.8[mm] 以下に縮

んだらブラックホールになるでしょう。

3.12 運動量とその保存則

これまで、運動方程式を適用して、等速直線運動・等加速度運動・等速円運動についての性質を考えてきました。力の情報が与えられれば、ラプラスの悪魔の考え方に従って、運動方程式を適用すれば未来を予測できそうです。そのような意味では、これから物理学を勉強することは多くないような気もします。

しかし、それぞれのケースについて個別に一つ一つ問題を考えるのは大変です。より一般性のある運動の性質がないものでしょうか。そうしたものがあれば、運動方程式を毎回適用しなくても、ある程度、未来を予想できます。ここからはそのような話題について考えていきたいと思います。まず、ここでは、運動方程式を作用反作用の法則と組み合わせて考えてみましょう。

問題設定

より一般性のある運動の性質、とお話しました。しかし、出発点は、ある程度具体的な問題です。例えば、平面上にレールが敷いてあって、その上に、初期に静止していた二つの台車があったとしましょう。その台車は、(途中のバネなどを介して) 互いに押し合うとします。すると、その二つの台車は互いに離れていくことでしょう。このように、二つの物体が分離する運動を考えます。

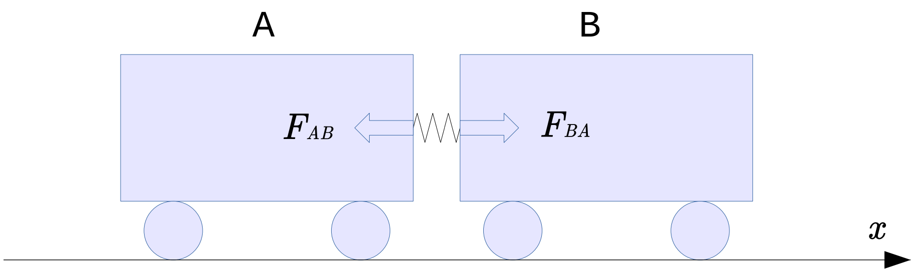


図 3.23: 運動量保存則の問題設定

第三法則の復習

例えばこのとき、台車 A の質量 (m_A) 方が、台車 B の質量 (m_B) よりも大きかったとしましょう。すなわち、$m_A > m_B$ とします。

ここで問題です。

> 「台車 A が台車 B を押す力 (F_{AB})」と「台車 B が台車 A を押す力 (F_{BA})」は、どちらの大きさ（絶対値）が大きいでしょうか。

ここで、ニュートンの運動の法則の第三法則 (**作用反作用の法則**) を思い出してみましょう。二つの物体 (物体 A と物体 B) があって力を及ぼし合っているとき、その二つの物体に作用する力は、大きさが同じで向きが逆です。つまり、F_{AB} と F_{BA} は、大きさが同じで向きが逆である、ということになります。

ちょっと意外に思うかもしれませんが、これが、作用反作用の法則が言っていることです。

第二法則と第三法則の組み合わせ

ここで、台車 A, B について、運動方程式を考えてみます。今、二つの台車だけを考え、A,B 間に作用する力 (**内力**) しか作用せず、その他の物体からの力 (**外力**) は存在しないことを仮定します。すると、運動方程式は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
F_{AB} &= m_A a_A \\
F_{BA} &= m_B a_B
\end{aligned}
$$

ここで、a_A, a_B は、それぞれ、A と B の加速度です。このままだと扱いにくいので、加速度の部分を運動方程式を考えたときの元の形 (3.3) に戻して考えます。

$$\begin{aligned} F_{AB} &= m_A \frac{\Delta v_A}{\Delta t} \\ F_{BA} &= m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t} \end{aligned}$$

この 2 式を足しあわせます。すると、作用反作用の法則から、$F_{AB} + F_{BA} = 0$ になりますから、

$$\begin{aligned} 0 &= m_A \frac{\Delta v_A}{\Delta t} + m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} (m_A \Delta v_a + m_B \Delta v_B) \end{aligned}$$

となるでしょう。Δt は、単なる係数になっているので、次のようになるでしょう。

$$0 = m_A \Delta v_a + m_B \Delta v_B$$

Δ が変化量の意味であること、また、速度は時間的に変化するかもしれませんが、m_A, m_B が定数であることを考えると、

$$0 = \Delta(m_A v_a + m_B v_B)$$

と書けそうです。つまり、$m_A v_a + m_B v_B$ の変化量はゼロである、ということになります。

運動量保存則

ここまでの議論を整理しましょう。二つの台車 A, B の間だけで力を及ぼし合う時、**運動方程式**と**作用反作用の法則**を組み合わせることで、質量と速度の積の合計 $m_A v_a + m_B v_B$ は変化しない、という結論が得られました。

物理学では、時間的に変化しない物理量によく着目します。そして、時間変化しないことを「**保存**する」と表現します。また、保存する物理量を**保存量**といいます。物理学で保存量に注目する理由は明らかです。運動方程式から運動の様子をいちいち計算しなくても、将来をある程度予想したいからです。そのためには、時間的に変化しない量に着目すると便利です。

質量と速度の積は、特に**運動量**[5]といいます。

そこで、今回のように、二つの物体に内力だけが作用している場合、運動量の合計は保存量である、と言えます。このような性質は**運動量保存の法則**あるいは、短く**運動量保存則**といいます。

法則：運動量保存則

二つ（一般的には複数）の物体があって、それらの物体には内力だけしか作用しないとき、物体の運動量の合計は保存する。

これを式で表すと、次のようになる。

$$(\text{ある時刻の運動量の合計}) = (\text{別の時刻の運動量の合計})$$

例えば、質量 m_A の物体 A と、質量 m_B の物体 B について、内力だけが作用しているとする。それぞれ、速度が v_{A0} から v_{A1} に、v_{B0} から v_{B1} に変化したとする。運動量保存即は次のように表すことができる。

$$m_A v_{A0} + m_B v_{B0} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}$$

分離の問題への適用

最初の問題に立ち戻ってみましょう。この問題では、初期に静止していたのですから、初期の A,B の速度は共にゼロです。すなわち、$v_A = v_B = 0$ ですから、$m_A v_A + m_B v_B = 0$ となります。そこで、時間が経っても、$m_A v_A + m_B v_B = 0$ が保たれたままである、ということになります。

[5]物理学用語は日常用語と語感が異なります。運動量はその典型例です。サッカーで「運動量では相手チームを上回っている」等という場合の運動量と、ここで述べている運動量とはまったく関係がありません。

あらかじめお伝えしたとおり、$m_A > m_B$ という設定であったとしましょう。すると、どのようなことが起こるでしょうか。

$$
\begin{aligned}
m_A v_A + m_B v_B &= 0 \\
m_A v_A &= -m_B v_B
\end{aligned}
$$

図から、v_B は、右側に進むので正の値をとるでしょう。すると、v_A は、負の値になるとわかります。B は右側に進み、A は左側に進む、というわけです。速さについてはどうでしょうか。$m_A v_A$ と $m_B v_B$ の絶対値が同じで、$m_A > m_B$ です。$|v_A|$ と $|v_B|$ のどちらが大きいかを考えると、掛け算して等しいのですから、$|v_B|$ の方が v_A よりも大きくなります。質量が大きい方はゆっくり、質量の小さい方は素早く、遠ざかっていくことになります。直感的な結果と一致すると言えるのではないでしょうか。

初期に止まっていて、互いに反発して動く運動は、特別な運動のように思うかもしれません。しかし、実際には、多くの事例を考えることができます。

例えば、人間と地球です。人間と地球とは、摩擦を通じて力を及ぼし合っています。ところが、地球の質量は人間よりもずっと大きいです。そこで、軽い人間は素早く動き、地球は反対方向にゆっくり動くことになります。事実上、地球は止まったままです。

例えば、宇宙空間に静止していたロケットです。エンジンを噴射して、ガスを放出すると、ロケットはガスとは反対方向に進むことができます。ガスとロケットは、ガスの圧力を通じて力を及ぼし合います。このとき、ロケットに比べてガスは質量が小さいので、ガスを高速に噴射しなければロケットは前進できません。

例えば、水泳です。泳ぐことによって人が前に進むのは、人が水を後ろに押すとき、その反作用があるからです。人と水とを合わせた運動量は変化しません。より多くの水を、より速く後ろに押し出すことで、人はより速く前に進めます。

こうしてみると、多くの運動が、運動量保存則と関係があるとわかります。

こぼれ話：ガンダムは加速できるか

弾丸の例が示しているように、軽いものを高速で射出しても重いものは少ししか動きません。従って、軽いガスの噴射によって巨大な構造物を加速することは、かなり難しいです。大量のガスを非常に高速で放出する必要があります。

これは、スペースシャトルの打ち上げを見ても分かります。スペースシャトルは、本体よりもはるかに大きな燃料タンクを接続しています。そして、燃料を燃焼させることで圧力を上げて、より高速にガスを噴出できるようにしています。

モビルスーツと呼ばれる人間型戦闘機**ガンダム**が活躍する SF アニメでは、大きな加速度を得るために、噴射口からガスを噴出しています。しかし、画像で見るような加速度を得ることができるか、疑問です。本当にその程度の加速度を得るためには、機体のほとんどが燃料であるか、余程反応性の高い物質を使わなければなりません。

3.13 エネルギーとその保存則

エネルギーの種類

まず、**エネルギー**とは何か、考えてみましょう。エネルギーという言葉は、テレビアニメ等でも頻繁に登場します。そこで、エネルギーの定義を考えたことがあるかもしれません。実は、エネルギーの定義は、決してやさしくありません。ここでは、エネルギーの定義にかかわる大切な点を一つ指摘しておきます。それは、「エネルギーは増えも減りもしない」ということ、つまり、エネルギーは**保存量**である、ということです。ところが、わたしたちは、「エネルギーを作り出す」とか「エネルギーを消費する」という言い方をします。これについては、また、改めて考えましょう。

ここまで説明しても、エネルギーとは何か、まだ分かりにくいと思います。そこで、ここでは仮に、最終的に**熱**になるもの (物体の温度を上昇させることができるもの) をエネルギーと呼ぶことにします。エネルギーの種類にもいろいろあります。

運動エネルギー

運動に伴ってエネルギーがあると考えられます。例えば、手をこすると熱が発生します。これは、手の運動に伴

うエネルギーが熱になり、手の温度を上昇させたと考えられます。このような運動に伴うエネルギーを運動エネルギーといいます。運動エネルギーは、次のように書き表されます。

$$\frac{1}{2} \times (\text{質量}) \times (\text{速さ})^2$$

ここで、先頭の $\frac{1}{2}$ の部分について補足説明しておきます。これは数学上の便宜的なものであり、実質的な意味は、あまりありません。

位置エネルギー

物体の存在する位置に応じて決まるエネルギーのことを位置エネルギーといいます。例えば、物体が高い場所にあると、それが落下することで速さが増し、運動エネルギーになります。そして、落下点にあるものを加熱させることができます。この場合は、高いほど、位置エネルギーが大きくなります。重力が作用している場所での位置のエネルギーは、次のように表されます。

$$(\text{質量}) \times (\text{重力加速度}) \times (\text{高さ})$$

同様に、バネについて考えてみましょう。バネの先端に物体をつけて、バネに変位を与えた (伸ばしたり縮めたりした) 後に手を離すと、物体を運動させることができ、運動エネルギーが生じます。そこで、重力の場合と同様に位置エネルギーがあると考えられます。バネの位置エネルギーは、理想的には次のように表されます。

$$\frac{1}{2} \times (\text{バネ定数}) \times (\text{変位})^2$$

ここで、**バネ定数**はバネの強さを表す量です (p.72 参照)。

力学的エネルギー

運動エネルギーと位置のエネルギーを合計したものを**力学的エネルギー**といいます。

化学的エネルギー

家庭のガスレンジでは、ガス管から出てくるガスを燃焼させます。燃焼とは、ガス (炭化水素) と酸素が化学反応を起こし、水と二酸化炭素に変化する現象です。このとき、熱が発生し、物体を温めることができます。そこで、化学物質には内在するエネルギーがあると考えられます。これを化学的エネルギーといいます。

音・光のエネルギー

音や光といった波動にもエネルギーがあります。音や光は物体に当たってそこで吸収されると、その物体の温度を上昇させます。

内部エネルギー

高温の物体にもエネルギーがあると考えらます。高温の物体と低温の物体を接触させます。すると、高温の物体の温度が低下し、低温の物体の温度は上昇します。これは、熱の作用です。エネルギーの名称としては内部エネルギーといいます。

以上が代表的なエネルギーです。

ここで、エネルギーの単位について考えておきましょう。運動エネルギーの定義を考えると、エネルギーの単位は $[\mathrm{kg} \times (\mathrm{m/s})^2] = [\mathrm{kg\ m^2/s^2}] = [\mathrm{Nm}]$ となります。この単位は短く [J](**ジュール**) と表します。

$$[\mathrm{J}] \quad = \quad [\mathrm{Nm}] = [\mathrm{kg}(\mathrm{m/s})^2]$$

位置エネルギーの場合にも同様に単位を計算して、同じになることを確かめてみましょう。

エネルギー保存の法則

宇宙中のエネルギーを足し合わせると、その値は変わらないと考えられています。これをエネルギー保存の法則あるいは、短く**エネルギー保存則**といいます。

ずっと以前は、うまく工夫することによって、無限のエネルギーを作り出せる機械ができるのではないかと考えた人々がいました。そのような機械は (第一種の) **永久機関**と呼ばれています。人々の努力の結果、このような永久機関は

無さそうだと分かっています。そこで、これを**原理**[6]として受け入れて、エネルギーは根本的に保存するものだ、と考えられるようになったのです。

力学的エネルギーについても保存則が成り立つ場合があります。摩擦や空気抵抗などがない場合、つまり、力学的エネルギーが熱等の他のエネルギーに変わらないような場合、力学的エネルギーの範囲内でエネルギーは保存します。これを力学的エネルギー保存の法則 (あるいは短く**力学的エネルギー保存則**) といいます。

運動方程式から力学的エネルギー保存則を導くことができます。しかし、導出はやや数学的なのでここでは省略します。ただ、運動方程式の応用として、力学的エネルギーの保存が導けることは、運動方程式の応用範囲が広いことを示す一例なので、記憶にとどめておきましょう。

法則：エネルギー保存の法則

複数の意味で用いられる。例えば次のような意味で用いられる。

1. 宇宙全体のエネルギーの合計は時間変化しない。
2. 他に何の変化も起こさずにエネルギーを作り出すことはできない。
3. 摩擦や空気抵抗などがないとき、物体の力学的エネルギーは保存する。

エネルギーと仕事

エネルギーは互いに変換することができます。

例えば、重力による位置のエネルギーは運動エネルギーへ変換することができます。高いところで静止していた物体を自由落下させることを考えてみましょう。そのとき、高さが Δh だけ下がったとします。すると、それに応じて重力による位置エネルギーは減ります。一方、速さ v は増して、それに応じて運動エネルギーは増大することになります。

一般に、物体に力 F が作用して、作用する力に沿って Δx だけ移動したとき、力 F が物体に $F\Delta x$ だけ**仕事**をした、といいます。上の例では、重力 (大きさ mg) が物体に $mg\Delta h$ だけ仕事をしたことになります。仕事はエネルギーの変換量と考えることができます。上の例では、重力による位置のエネルギーが、重力が物体にする仕事によって、運動エネルギーへ変換されるのです。

学びの Tips：物理学の「熟語」

ここで注意したいのは、仕事について、「A が B に〜だけ仕事をした」という表現を使うということです。何が何に仕事をしたのか、という情報を必ずつけ加えるように十分に気をつけて下さい。

英語に熟語があるように、物理学の場合にも決まりきった表現があります。相手に伝わるようにするために、それをしっかり守るように心がけてください。たとえば、「大きい」といった簡単な表現の場合もそうです。「〜よりも大きい」というように何に対して大きいか、という表現をつけ加える必要があります。

考えてみよう：エネルギーはどこから？

エネルギーを作り出すことはできるでしょうか。

例えば、家の照明を考えてみましょう。家の照明から出る光エネルギーは、電気エネルギーによって作られています。電気エネルギーは電線を通じて発電所に接続されており、発電所で作られています。火力発電所を考えると、石油と酸素を化学反応させます。石油と酸素は、二酸化炭素や水よりも、より高い化学的エネルギーを持っているので、化学反応でエネルギーを取り出すことができます。石油はずっと以前に住んでいた生物がもとになっていますので、生物が蓄えた化学的エネルギーです。植物は太陽の光によってエネルギーを得ました。では、太陽ではエネルギーが純粋に作り出されているのでしょうか。実は太陽の内部では水素原子の核融合反応という激しい反応によって核エネルギーを熱のエネルギーに変換しています。それが太陽から放出されるエネルギーの源になっています。宇宙の水素原子のほとんどは、宇宙の始まりにできました。

エネルギーを純粋に作ることはできません。他のエネルギーからの変換だけができることです。そして、宇宙全体

[6] 他の事柄から説明できないもの。また、これを基本にして論理を展開するもの。6 章を参照して下さい。

のエネルギーは、宇宙ができた当時から、ずっと一定のままです。エネルギー保存則は宇宙規模で成り立っています。

考えてみよう：エネルギーを「使う」?

逆に「エネルギーを消費する」ということもできません。実際、例えば屋内の照明から出た光は、壁や床に当たって、熱になって壁や床の温度を上昇させるか、または、化学変化を起こし化学的エネルギーとして蓄えられます。では、私たちが「エネルギーを消費する」と表現するのはどういうことなのでしょうか。

このこと考えるには、エネルギーに「質」があることを理解しなければなりません。私たちが使えると感じるのは「高い質」のエネルギー (電気や運動エネルギーなど) です。一方、身の回りの空気や水は熱を持っているので、そこにもエネルギーがあります。しかし、その熱から発電することは事実上できません。こうした熱は「低い質」のエネルギーであると考えられます。

人間が「エネルギーを消費する」と表現しているのは、実は、エネルギーを「高い質」から「低い質」のエネルギーへ変換していることに対応していると考えられます。こうしたことは熱力学で**エントロピー** (いわば、エネルギーの品質の低さ) を勉強したときに考えてみてください。

3.14　慣性力

今度は、運動方程式の応用というよりも、運動方程式がどういうときに成り立つかを考えます。

例えば、電車が発車するときを考えましょう。電車に乗っている人は、進行方向と反対方向に力を受けたように感じます。一方、停車するときは、人は進行方向に力を受けているように感じます。

これを電車に乗っていない人から観察してみましょう。発車するとき、電車に乗って立っている人は静止していたのだから、慣性の法則によって、止まりつづけようとするのは当り前に見えます。もしも床がツルツルだったら (床での摩擦が無かったら)、電車内で立っている人は静止したままで、電車だけが進むでしょう。そして、後ろの連結部分のドアに衝突してしまうでしょう。(一方、停車するときは、電車だけ止まり、人間は同じスピードで進みつづけるように見えるはずです。)

床がツルツルである場合のこうした現象を、もう一度電車に乗って、電車と同じ速度で移動する人から観察することを考えてみます。すると、電車に乗っていない人から観察して当たり前だったような現象は、電車に乗っている人から見ると加速度運動をしているように見えるはずです。力は何も働いていないはずなのに。

これまで考えてきたような普通の状況では、慣性の法則がなりたち、物体は静止しているか、等速直線運動します。慣性の法則が成り立つような座標系を**慣性系**といいます[7]。ところが、電車の場合のように、加速度運動しているような観測者から見ると、状況は違って見えます。そのような観測者は、加速度とは逆向きで、その加速度に質量を掛けたような力が作用しているように感じられます。これは、慣性系に対して加速度運動している座標系 (**非慣性系**) から観察することによって現れる**見かけの力**であって、本当の力ではありません。このような見かけの力を、**慣性力**といいます。

このような慣性力は電車の例の他にもあります。

1. エレベータの中

   エレベータの中でもこのような力を体験します。止まっていたエレベータが上昇を開始する場合を考えましょう。このとき、エレベータの上向きの速度が増えるので、加速度は鉛直上向きです。すると、エレベータに乗っている人は、鉛直下向きの慣性力を受けているように感じます。つまり、体重が重くなったように感じる訳です。次に上昇していたエレベータが止まるときを考えましょう。すると、上向きの速度が減っている訳ですから、下向きの加速度をもって運動している訳です。そこで、中にいる人は、上向きの慣性力が作用しているように感じます。つまり、体重が軽くなったように感じます。

2. 回転している場合 – 遠心力

   座標系が速さ一定で回転している場合 (等速円運動している場合) を考えましょう。速さは一定でも、この運動には加速度があることを勉強しました。この座標系も慣性系ではありません。等速円運動の加速度が中心向きであ

[7] このことについては、「考えてみよう：慣性の法則は必要か」(p.32) を参照してみてください。

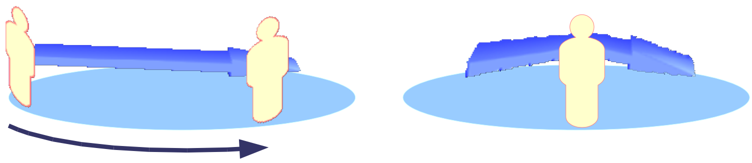


図 3.24: コリオリの力:まっすぐ進むものを回転系で観察した様子

ることに対応して、回転している観測者は中心から外向きの慣性力が作用しているように感じます。これを**遠心力**といいます。

3. 回転している場合 – コリオリの力 (転向力)

   回転している場合には、もう一つ別の慣性力が作用します。ここで、思考実験として、まっすぐ進むボールを回転台に乗って観察することを考えてみましょう (図 3.24)。すると、遠心力とは別の力が作用し、ボールの軌道が曲がるように感じられるでしょう。このような慣性力を**コリオリの力**といいます。運動している物体に対して速度に垂直に力が作用し、向きを転換させる働きがあるので、**転向力**ともいいます。

   コリオリの力は、気象学や海洋学にとって重要ですので、その作用する向きを覚えておくと便利です。例えば、北半球 (回転軸上から見下ろして左回りになっている場合) では、進行方向に対して右手に曲がるように作用します。

こぼれ話：ガンダムのパイロットは気絶しないのか

「考えてみよう：特撮映画での物の壊れ方」(p.34) で述べたように、同じ加速度運動であるならば、長い距離を動くためには長い時間がかかります。そこで、自分の体長と同じ長さを自由落下する場合、大きな構造物ほど、長い時間がかかることになります。

ガンダムの場合、人間の身長の 20 倍程度の大きさがあります。そこで、人間が動く感覚でロボットが動いたとすると、ロボットの各部分は、相当大きな加速度で動かさなければなりません。そのような加速度で動くロボットの操縦席は、典型的な非慣性系です。しかも大きな慣性力を受けることになります。パイロットは、何か工夫をしない限り、慣性力によって、操縦席で宙に浮いたり、操縦席の壁に激突したりしている可能性が高いです。

3.15 角運動量とその保存則

もう一つの運動方程式の応用例として角運動量保存の法則 (あるいは短く**角運動量保存則**について説明しましょう。

原点の周りの**角運動量**[8]の大きさは次のように定義されます。

(質量) × (原点からの距離) × (速度の回転方向成分)

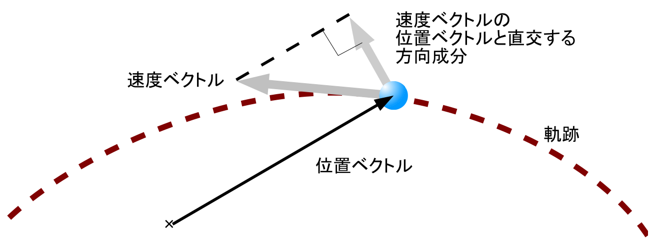


図 3.25: 角運動量の定義

ここで速度の「回転方向成分」とは、位置ベクトルに対して垂直な方向の成分です (図 3.25)。運動量と同様に、この角運動量の合計も運動方程式から導かれる保存量として知られています。すなわち、二つ (以上) の物体間で内力だけが作用している場合、角運動量は保存します。これを**角運動量保存の法則**あるいは、**角運動量保存則**といいます。

ただし、これが保存するためには条件があります。**作用反作用の法則**では、二つの物体が力を及ぼし合うとき、二つの力の大きさが同じで向きが逆であるとしました。それには、いろいろな状況がありえます。次の図を見てください (図 3.26)。どちらも、作用反作用の法則を満たしています。ところが、運動方程式を考えると、力と加速度は同じ向きですから、右の図では、いかにも回転が始まると予想されます。一方左側の図では、新たに回転が生まれるようには見えません。このように、互いに引き合ったり、互いに反発し合ったりするような場合に限って、角運動量は保存します。

[8] 角運動量は大きさと向きを持ったベクトルです。これをきちんと定義するには**外積**の考え方を知っていると簡単に定義できます。具体的には、角運動量は、「質量× (位置ベクトルと速度ベクトルの外積)」として定義されます。詳しくは、「力学」で勉強してください。

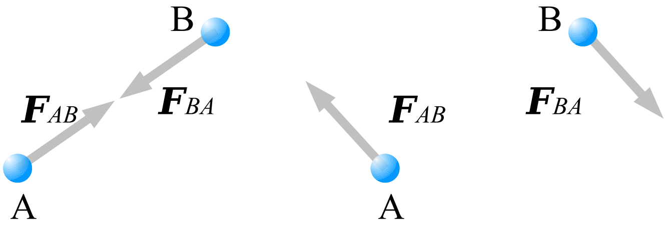


図 3.26: 角運動量の保存する場合 (左) と保存しない場合 (右)

言葉を変えると、力が二つの物体を結ぶ線に沿っている場合 (このような場合に作用している力を**中心力**といいます。) に限って角運動量は保存します。ほとんどの場合、作用する力は中心力です。そこで、角運動量は保存します。ところが、いくつかの例では中心力ではありません。そのような場合には注意が必要です。この問題については 6.3 節で改めて考えましょう。

法則 : 角運動量保存の法則

複数の物体があって、それらの物体には中心力であるような内力だけしか作用しないとき、物体の角運動量の合計は保存する。

では、実際に角運動量が保存するような場合の例を考えてみましょう。例えば、回転台の上に乗って腕を伸ばしたり縮めたりしてみます。すると、回転の速さが変わることが観察されます (図 3.27)。このような場合、外部から回転さ

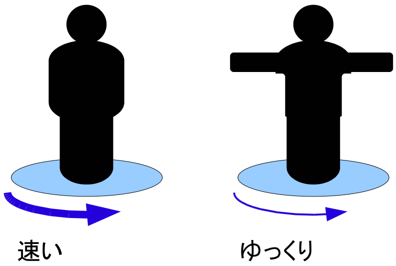


図 3.27: 角運動量保存則が適用できる例:回転台上での運動

せるような力は作用していません。それなのに、回転の速さを変えることができるのは、角運動量保存則で説明できます。原点を回転軸上にとると、この場合の角運動量 は、(質量) × (回転軸からの距離) × (回転の速さ) で表されます。図 3.27 左では、腕の部分の軌道半径 (回転軸からの距離) が小さいため、回転が速くなります。一方、図 3.27 右では、腕の部分の回転の軌道半径が大きいため、回転が遅くなります。そうして角運動量の合計が一定になるようになっています。フィギュアスケートの選手も、回転の速さを変化させます。そのとき、注意深く見ると、腕や脚を動かして、回転中心からの距離を変えているのが分かるはずです。

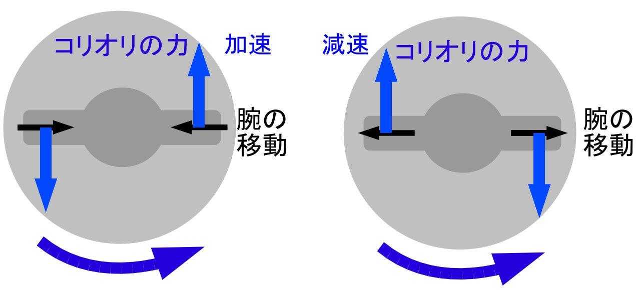


図 3.28: 回転台の速さの変化のコリオリの力による説明

回転台で回転の速さが変化する例は、前に出てきたコリオリの力で説明することもできます。上から見て反時計回りに回転する回転台に人が乗っているとしましょう。これは、丁度、地球の北半球にあたります。その人が腕を中心方向

に引きよせるとき、この腕にはコリオリの力が作用します。それは、回転を加速する向きです。こうして、回転台の回転の速さは加速します。逆に、腕を広げるときは減速する向きにコリオリの力が作用します (図 3.28)。

では、逆に回るときには、腕を広げると加速するでしょうか。そうはなりません。実は、逆回りのときにはコリオリの力の作用する向きが逆になります。結局、どちらの場合でも、腕を広げる減速し、腕を縮めると加速するようになる訳です。

学びの Tips： 保存則について

物体の未来の運動を予知することが力学の重要な目的であったとしたら、運動方程式を積分するだけで話は終わりのはずです。ところが、一般的には積分することが簡単ではありません。そうした状況の下で、保存量が得られれば、未来についての何らかの情報が得られることになります。それが保存量が重要な理由です。

運動量・角運動量・エネルギーの三つは、あらゆる物理学の分野に現れてくる重要な保存量です。

3.16 電磁気学を学ぶ前に

力学についての学習を終えた段階で、ここまでの学習を振り返ってみましょう。一つの重要な結果は、**ニュートン**によって打ち立てられた運動の法則でした。運動の法則の一つである**運動方程式**を理解するためには、運動の表現はどのようにすべきか、また、速度や加速度はどのように定義されるかを考えました。力の大きさをどのように定義するかについても考え、力の単位 [N](**ニュートン**) を導入する際には、単位についての考え方を利用しました。いわば、運動方程式を学習する前は、運動方程式を理解するための準備をしていたのです。運動方程式を原子論と組み合わせて考えることで、**ラプラスの悪魔** (p.31 参照) に見られるような世界観を得ることができました。私たちには、宇宙の全ての出来事は、運動方程式によって記述できるという感覚、あるいは、全ての問題は解決したような感覚が与えられ、これ以上探求すべきものは無いように思ってしまいます。

しかし、同時に、逆にそのような視点から、私たちがこれから探求すべきことが明確になったとも言えます。それは次の 3 つの観点です。

1. 力の種類
   力についての情報が与えられれば、運動方程式から加速度が分かります。ところが、この力について、私たちはまだよく知りません。万有引力について、また、張力については学習しました。しかし、それ以外の力は無いのでしょうか。何種類ぐらいの力があるのでしょうか。また、それらの力にはどのような性質があるのでしょうか。

2. **粗視化**
   例えば、水 18[g] に含まれている水分子の数は、おおよそ、6×10^{23} 個です。例えば、この分子を 1 秒間に 1 個数えたとします。それだけで、2 京年 (2×10^{16} 年) 近くかかってしまいます。粒子の数が多いことは積分することを困難にします。ところが、単に多いだけではなく、それは絶望的とも言える多さです。そこで、物質を構成している個々の分子の運動を考えることはあきらめ、統計的にどのような性質があるかを考えたり、集団としてどのような運動をするかを考える方向性がありえます。粒子の集団を考えていくことを粗視化と呼びます。

3. 新たな法則
   ラプラスの悪魔の考え方を受け入れたところで、積分を繰り返し計算した結果、初めて何かが分かるようでは、実際に分かったような気がしません。そこで、運動方程式を、何か別の情報と組み合わせることで、新たな法則を作り、積分を行わなくても何かを言うことができるようにすることは、実用上、重要です。ただし、既にある情報を組み合わせただけですから、新事実が分かった訳ではありません。実用上重要であるというのは、そういう意味です。こうして言うことができるようなったものは、法則と呼ばれます。新たな法則を見つけることが目標の一つになります。

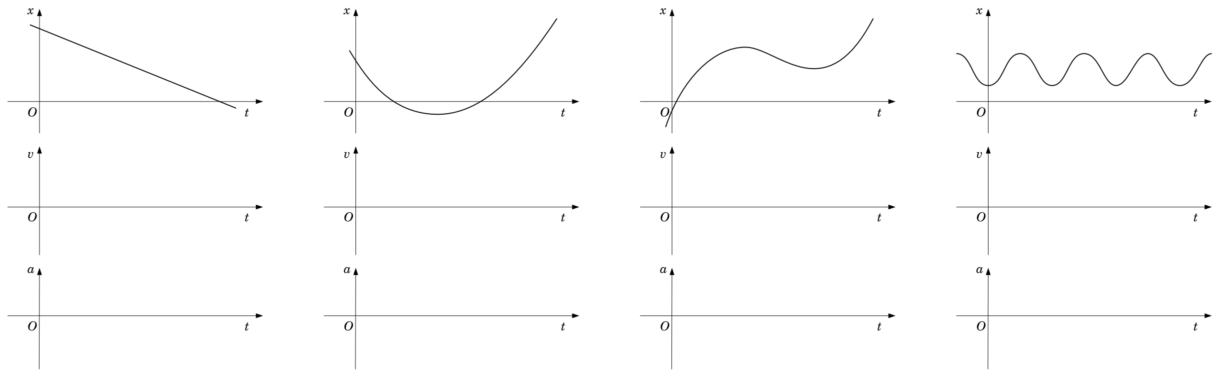
   力学のところで述べた、**ケプラーの法則**の第 3 法則は、運動方程式と万有引力の法則を組み合わせることで得られました。積分を繰り返さなくても、等速円運動の軌道半径と周期についての情報が分かるようになりました。また、運動方程式と**作用反作用の法則**とを組み合わせると、**運動量保存則**が得られました。積分しなくても、自動車同士の衝突などについて、情報が得られるようになりました。

   他にも法則があれば、予知できることが増えることになります。

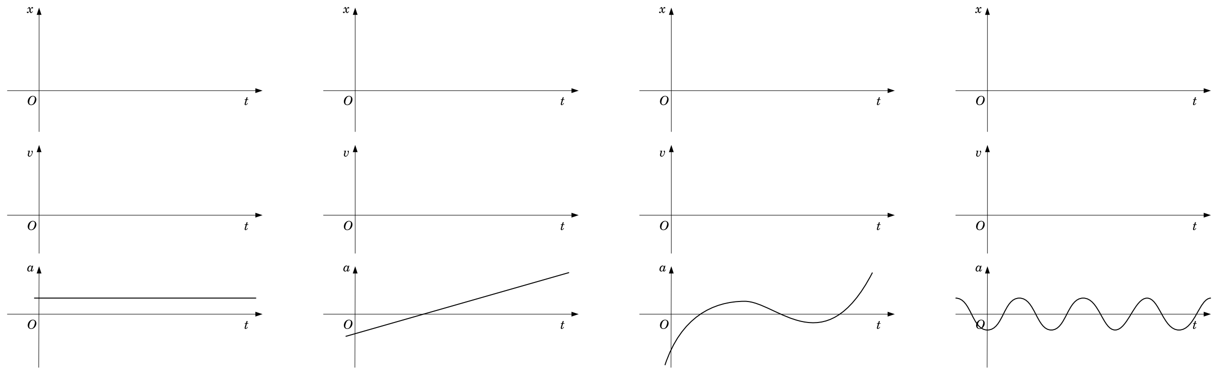
これらが、ここから学ぶ物理学の方向性です。これらの観点を意識しながら、次の章で電磁気学を学んでいきましょう。

課題

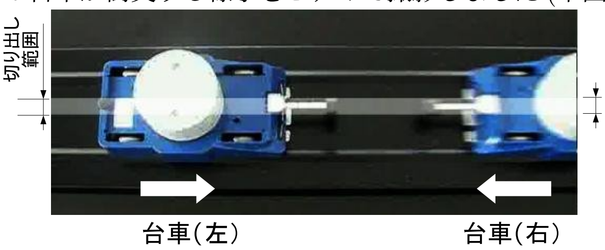
1. 次のようなベクトルの演算を考えます。それぞれどのような結果になるでしょうか。図示してみましょう。また、結果を成分で表してみましょう。ただし、$\boldsymbol{a} = (1, 2)$、$\boldsymbol{b} = (-2, 1)$ であるとします。
   (a) $3\boldsymbol{a}$　(b) $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$　(c) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$
2. 次のような運動を図に描き表してみましょう。
   (a) 今朝、家を出てから大学に到着するまでの運動を考えます。自宅を原点に、東向きを横軸に、北向きを縦軸にとって軌跡を (模式的に簡略に) 図に示し、ところどころ、時刻を書き入れてみましょう。
   (b) 自宅から大学までの運動について、東西方向の位置と、南北方向の位置の時間変化をグラフで表してみましょう。
3. 物体がテーブルの上を滑りながら直線上を進むことを考えます。摩擦力が一定の場合、この運動は等加速度運動であるといえるでしょうか。
4. 次の物理量の単位を定義や法則に基づいて、 SI の基本単位を用いて表してみましょう。どのような法則を用いるかも考えましょう。
   (a) 速度　(b) 加速度　(c) 力　(d) 運動量　(e) 運動エネルギー　(f) 仕事　(g) 角運動量　(h) 万有引力定数
5. $v = \frac{2\pi r}{T}$(式 3.8) と $a = \frac{2\pi v}{T}$(式 3.9) から $a = \frac{v^2}{r}$ (式 3.11) を導いてみましょう。
6. 宇宙空間で “静止” していた宇宙船があるとしましょう。(つまり、静止して見えるような慣性系から宇宙船を観察したとします。) 宇宙船の燃料を燃焼させて噴射させました。そして宇宙船は動き出しました。
   (a) 宇宙船の初期の質量が 1001 トンとし、そのうち 1 トンを燃焼させて噴射したとします。また、燃焼によって噴き出した燃料は平均で 1000m/s で噴き出したとします。すると、宇宙船 (質量 1000 トン) はどれくらいの速さで進むことになるでしょうか。運動量保存則を用いて考えてみましょう。
   (b) 初期の宇宙船の質量が 101 トンで、噴射した燃料の質量が 1 トンの場合はどうでしょうか。
7. 無重力状態の国際宇宙ステーションで浮遊している宇宙飛行士が、空気中で “水泳” を行うとします。ところが、宇宙飛行士はあまり進めません。なぜでしょう。運動量保存則から考えてみよう。(なお、国際宇宙ステーション内で宇宙飛行士は普通に息をしています。中に空気はあるのです。)
8. 次の図には上段に位置を表す座標 x の時間変化が描かれています。上段のグラフが表す関数を時間で微分してできる関数 (導関数, 速度) を中段のグラフに描き入れてみましょう。また、中段のグラフで表される関数を微分してできる関数 (加速度) のグラフを下段に描き入れてみましょう。なお、この問題は微分することの意味を理解するためのものですから、各軸の数値は原点 (値はゼロ) 以外は入れていません。



9. 次の図には下段に加速度の時間変化が描かれています。対応する速度の時間変化のグラフを中段に、対応する位置の時間変化のグラフを上段に描いてみましょう。ただし、時刻 $t = 0$ での速度はゼロ ($v = 0$) であり、位置を表す座標もゼロ ($x = 0$) であるとします。

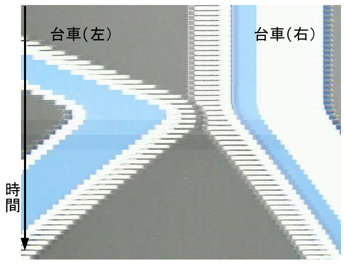


10. 2 台の台車が衝突する様子をビデオで撮影しました (下図参照)。

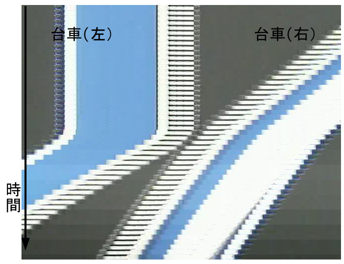


このビデオの 1 コマ 1 コマから、画像の一部分 (上記写真の明るい部分) を切り出し時間順に並べました。次のそれぞれの図の場合について、右側の台車と左側の台車でどちらが大きな質量を持つか (どちらが重いか) 予想してみましょう。また、その理由を述べてみましょう。

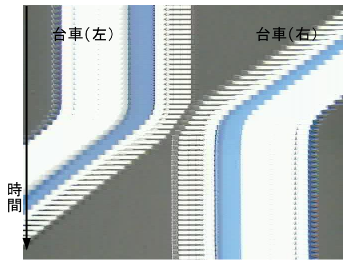
(a) 衝突例 1



(b) 衝突例 2



(c) 衝突例 3



11. 摩擦や空気抵抗などが無視できるジェットコースターを考えます。地上 10m で静止していたジェットコースターが地上まで降りてきたときのジェットコースターの速さはどれくらいになるでしょうか。重力加速度を 9.8[m/s^2] として、エネルギー保存則を用いて計算してみましょう。単位は [m/s] として求めてみましょう。また、[km/h] という単位でも求めてみましょう。

第4章　電磁気学

4.1　電磁気学的現象

ここから学ぶ電磁気学について、これまで皆さんが知っているかもしれない電磁気学的な現象について整理しておきましょう。

1. 磁石と静電気

   磁石の N 極と S 極は引き合います。ところが、N 極と N 極は反発しあいます。また、冬にセーターを脱ぐとき、シャツに貼りついたようになります。これは静電気によってセーターとシャツの間に引き合う力が作用したのです。引き合う力は**引力**、反発する力は**斥力** (せきりょく) といいます。

2. 電流の周りの方位磁針

   導線に電流を流すと、その周りに置いた方位磁針 (小さな磁石で、北を指し示すための装置) は向きが変わります。

3. 発電機

   磁石と、電線を巻いて作ったコイルを組み合わせ、コイルを組み合わせると発電できます。

力学を学んだ皆さんは、こうした現象は何らかの力によって引き起こされているのである、と考えることができるでしょう。こうした電磁気学的な現象は、この本ではまだ紹介していない力があることを示しています。

万有引力は、物体の質量によって作用する力の大きさが決まっていました。同じように、上に挙げた電磁気学的な現象をもたらすものは、物体に備わっている何らかの性質によるものと考えます。それらは、電気については**電荷**、磁気については**磁荷**です。電荷と磁荷によって力が生じ、こうした電磁気学的な現象が生じると考えられます。

ここでは、まず、電荷と磁荷によってどのような力が生じるかを説明し、その後、これらの現象について考えていきましょう。

4.2　電荷と磁荷の電磁気学

4 種類の力

電荷と磁荷によって生じる力の位置付けについて考えるために、この世の中にはどのような力があるのか、挙げてみたいと思います。ここで、私達が日常体験する力について考えてみましょう。例えば、縮んだバネには伸びようとする力が作用します。バネを構成する 1 点 1 点が互いに反発して伸びようとする訳です。また、私達は椅子に座っています。万有引力が作用しているにもかかわらず、椅子に座った人が下に落下しないのは、椅子が支えてくれているからです。椅子は体重によって少しだけ変形し、バネと同じように内部に反発する力が作用して体を支えます。**張力** (p.36) も同様です。法則として理想化してきましたが、張力の実態は、ほんの少しだけ伸びた糸が元に戻ろうとする力です。このように物体の変形に伴って生じる力を**弾性力**といいます。

ところが、弾性力などを含めた世の中の様々な力の本質をつき詰めていくと、意外なことに、実はたったの四つしかないことが分かっています。逆に表現すると、人類はこの四つの力しか知りません。

1. **万有引力**

2. **電磁気力**

3. **強い相互作用**

4. **弱い相互作用**

これらの力のうち、**強い相互作用**と**弱い相互作用**については、やや不自然な名前のつけ方です。物理学用語で**相互作用**は力を意味します。「強い」とか「弱い」といった定性的な表現と「相互作用」という一般的な用語を組み合わせて名前がつけられているのは不自然です。実はこの二つの力は、**原子核** (「学びの Tips:原子」 参照) の内部だけで現れる力です。他の力に対して発見されてからの歴史が浅く、そのような意味では、私達の日常生活とは縁遠い力です。そこで、私達が日常意識することができる力は、万有引力と電磁気力だけになります。

学びの Tips：原子

ある純粋な物質を細かく見ていったときに、それ以上細かく分割すると、その物質の（化学的な）性質が失われてしまうような、もっとも小さいものを分子といいます。**分子**は**原子**で構成されています。

原子は単なる点ではなく、構造があります。原子の外側にある**電子**は、軽くて (原子の質量の 1/2000 程度以下で)、負の電気量を持った負電荷です。原子から電子を全て取り去った後に残る**原子核**は正の電気量を帯びている正電荷です。原子核は、ほとんど同じ質量をもった**中性子**と**陽子**で構成されます。中性子は電気的に中性です (電気量がゼロです)。陽子は正電荷で、正負の違いを除いて、電子と同じ電気量 (**電気素量**, 1.602×10^{-19}[C]) を持っています。一つの原子について、陽子の数と電子の数は同じです。そこで、原子自身は電気を帯びていません。このときの陽子 (あるいは電子) の数を**原子番号**といいます。電子の数が他の原子とどのように結合するかを決めるので、原子番号は重要です。

原子の大きさ (直径) は 10^{-1} [nm] 程度です。ちなみに、10^{-1}[nm] (= 10^{-10} [m]) という原子の大きさは、1[cm](=10^{-2}[m]) に 1 億個 (10^8 個。日本人の数と同じくらいの個数) 並べることができるような大きさです。原子核の大きさ (直径) は、原子の大きさの、更に 1 万分の 1 程度以下 (10 [fm] = 10^{-14}[m] 以下) です。原子の質量のほとんどは原子核にあります。

万有引力はとても弱い力です。地球ほどの大きな質量を持った物体が存在する場合に、初めて、皆さんの体重を実感させるような万有引力が作用するのです。すると、弾性力など、生活で実感する力の実体は、電磁気力であるということになります。では、電磁気力が具体的にどのように弾性力になるのでしょうか。物質は**分子**や**原子**という小さなもので構成されています。原子の構造は正 (プラス) の**電気量**を持った**原子核**と、それを取り巻く負 (マイナス) の電気量を持った**電子**で構成されます。両者は電磁気力で結びついています。ところが、物体を変形すると、その分子や原子の位置関係に歪み (ひずみ) を生じ、電気的なバランスが崩れ、元の状態に戻ろうとするような電磁気力が生じます。これが弾性力の正体です。このように考えてみると、私たちが日常的に感じる重力以外の力は、すべて電磁気力であることがわかります。電磁気力は身近な力なのです。

それでは、電磁気力について勉強していきましょう。

1. 電荷間に作用する力

   電荷とは電気的な現象を生じさせるものです。電荷のある粒子を**荷電粒子**といいます。電荷が帯びている電気の量を**電気量**といいます[1]。電荷間の力 (静電気の力) は古代ギリシアの時代には既に発見されていました。いくつかの物質の組合せから、**正電荷**と**負電荷**があり、異なる極性の電荷同士が引き合い、同じ極性の電荷同士は反発しあうことが分かりました。

   これを定量化したものが**クーロンの法則**です。電荷間に作用する力 (これを電気力とか**クーロン力**といいます。) について次のように表されることが分かりました。

   法則：(電荷に関する) クーロンの法則

   二つの電荷の間には次のような力が作用する。

   力の作用する向き

   二つの物体を結ぶ直線に沿った方向。電荷が同符号で斥力 (反発力)。異符号で引力。

[1]時々、電荷を電気量の意味でも使います。一つの言葉に二つの意味があるのは紛らわしいです。このテキストでは、電荷と電気量とを区別して表記することにします。電気量は、電荷量ということもあります。

大きさ F

$$F \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

r : 二つの電荷 1,2 の間の距離

q_1, q_2 : 二つの電荷 1,2 の電気量 (SI の単位 [C])

ε_0 : 定数 (真空の誘電率) $8.854 \times 10^{-12} \left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right] \quad \left(\left[\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg\ m}^3}\right]\right)$

クーロンの法則を**万有引力の法則**と見比べてみてください。とてもよく似ていることに気づくと思います。ここで、更にいくつかの注意があります。

- 電荷の大きさ

  まず、電荷の間の距離 r が式中にあります。電荷の大きさが無視できることを前提とすると、距離はきちんと決められます。このように大きさを無視した電荷を**点電荷**といいます。

- 電気量の単位

  電気量には [C](**クーロン**) という単位を用います。[C] は SI の組み立て単位です。電荷の単位 [C] は SI の基本単位である**電流**の単位 [A](**アンペア**) と関係があります。電流が電荷の流れであり、単位時間当たりに流れる電気量が電流であることを考えると、次のような関係があることが分かります。(電流については、4.4 節で学びます。)

  $$\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\right] = [\mathrm{A}] \quad \text{あるいは} \quad [\mathrm{C}] = [\mathrm{As}]$$

  電気量には正負を考えます。電気量が正である電荷が正電荷、負である電荷が負電荷です。

- **真空の誘電率**

  比例定数の中に現れる ε_0 (イプシロン ゼロ) は、真空の誘電率と呼ばれています。名前から分かるように、電荷の間が真空でない場合には、別の定数を用いる必要があります。誘電率の単位に気をつけてください。物理量の計算をするときには、単位についても計算が成り立つのでした。クーロンの法則の場合にも整合的であることを確かめておきましょう。

- 力の大きさ

  クーロンの法則は力の大きさについての法則です。この力の大きさは、どちら側の電荷に作用する力の大きさなのでしょうか。答えは両方です。**作用反作用の法則**を思い出してください。二つの物体が力を及ぼしあうとき、どちらの物体も受ける力の大きさは同じなのです。

- 引力か斥力か

  最後に、力の向きについてです。この式は二つの電荷間に作用する力の大きさを表しているので、向きについては、式だけでは分かりません。そこで、別途、力の向きを考える必要があります。作用する方向は二つの点電荷を結んだ線に沿っており、同じ符号ならば斥力、異なる符号ならば引力となります。二つの力が向きが逆であることは、**作用反作用の法則**と整合的であることも注意しましょう。

学びの Tips : クーロンの法則と万有引力の法則

この表式は、万有引力の表式と大変よく似ています。そこに深い意味がありそうな気もします。しかし、その意味については深く考えないことにしましょう。ただ、「万有引力で学んだことが、電磁気学にも応用できそうである」と気づくことは大切です。物理学の場合、分野が違っても似たような性質が現れることがよくあります。そうした点に気をつけて理解を深める習慣をつけてみましょう。

こぼれ話 : キャベンディシュ

クーロンの法則という呼び名はクーロン (1736-1806) という人名に由来しています。このような法則があると発見して公表した人の名前です。しかし、人類で初めてこの法則を発見したのはクーロンでしょうか。少なくとも別の人がもっと以前に発見していたことが分かっています。

その人物はイギリスの貴族であった**キャベンディシュ**(1731-1810) です。彼は自分の潤沢な財産を用いて数多

くの実験を精度よく行い、いくつもの発見をしました。クーロンの法則についても、クーロンよりも前に、よく工夫された実験装置を作って、精度良く研究していました。しかし、その成果は生前に公表されませんでした。

キャベンディシュにとって、物理学を学び、研究することはどのような意味があったのでしょうか。また、皆さんにとっての意味は何なのでしょうか。

2. 磁荷間に作用する力

磁気についても、電気ととてもよく似たことが言えます。**磁荷**とは、磁気的な現象を生じさせるものです。磁荷が帯びている磁気の量を**磁気量**といいます[2]。磁荷の間に作用する力も**クーロンの法則**で表されます。

法則：(磁荷に関する) クーロンの法則

二つの磁荷の間には次のような力が作用する。

作用する向き

二つの物体を結ぶ直線に沿った方向。磁荷が同符号で斥力。異符号で引力。

大きさ F

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

r : 二つの磁荷 1,2 の間の距離

m_1, m_2 : 二つの磁荷 1,2 の磁気量 (SI の単位 [Wb])

μ_0 : 定数 (**真空の透磁率**), $4\pi \times 10^{-7}\left[\frac{\mathrm{Wb}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right]$ $\left(\left[\frac{\mathrm{Wb}^2}{\mathrm{Nm}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2\mathrm{A}^2}\right]\right)$

この法則も、電気についてのクーロンの法則と万有引力の法則に、よく似ています。ここでも注意点があります。

- 単位

  磁気量は [Wb](**ウェーバー**) という単位で表します。この単位も SI の組み立て単位です。基本単位とは次のような関係があります。なぜこのような単位を採用したかは、ビオ・サバールの法則 (p.57) や、アンペールの法則に基づく考察 (p.67) を参照してください。

$$[\mathrm{Wb}] = [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m/A}] = [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2]$$

  磁気量にも正負を考えます。N 極は正の磁気量、S 極は負です。

- 真空の透磁率

  比例定数の中に現れる μ_0 (ミュー ゼロ) は、**真空の透磁率**と呼ばれています。真空の透磁率の値 $4\pi \times 10^{-7}$ は近似した値ではありません。このような値になるのは、電磁気学全般で用いる単位の決め方にも関係しています。つまり、きれいな数字になるように単位を決めている訳です。これについては、電磁気学を詳しく勉強するときに改めて学びます[3]。ここでは、透磁率の単位について、クーロンの法則に基づく計算が成り立っていることだけは確かめておきましょう。

- 単極子

  電荷については、プラスの電気量を持った原子核や、マイナスの電気量を持った電子のように、片方の電気量だけを持った粒子が存在します。ところが、磁気については、N 極だけの磁荷、あるいは S 極だけの磁荷 (これらを**単極子** といいます。) は発見されていません。しかし、この本では、理解を助けるために、仮に単極子が存在したとして話を進めます。

3. 電荷と磁荷の間に作用する力

この章の冒頭で自然界の四つの力について説明しました。そこで不思議に思った人も多いと思います。というのも、電気と磁気の力を一つにまとめているからです。これまでの説明では電気と磁気は別物でした。しかし、実際には、電気と磁気には密接な関係があります。

[2]電荷と同様に磁荷を磁気量の意味で使うことがあります。

[3]**アンペア** (A) を定義する際に、1[m] 離れた 2 本の電線に 1[A] の電流を流したとき、電線 1[m] 当たりに作用する力の大きさが、丁度 2×10^{-7}[N] になるように定めています。やや分かりにくいかもしれませんので、改めて勉強して下さい。平行電流間に作用する力については 4.4 節とその中のコラム (「こぼれ話：雷で割れる木」, p.4.4) を見てください。また、光の速さ $c = 299792458[m/s] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ という関係があることも将来学ぶでしょう。

それでは、具体的に、**電荷**と**磁荷**の間にはどのような力が作用するのでしょうか。これまで学習してきた万有引力・電荷間の力・磁荷間の力では、全て、物体の位置関係だけが作用する力を決めていました。ところが、電荷と磁荷の場合には、位置関係だけではなく、運動が力に関係しています。この点が今までと異なるので少しずつ話を進めていきましょう。

(a) 静止している電荷と静止している磁荷の場合

静止している電荷と静止している磁荷を考えます。これらの間には力は作用しません。

(b) 運動している電荷と静止している磁荷の場合

磁荷が静止していて、電荷が等速直線運動している場合を考えます（電流を思い浮かべましょう）。この場合には力が作用します。これまで考えてきた力と同様に、電荷と磁荷に作用する力には**作用反作用**の法則が成り立っているでしょう。そこで、まず、磁荷に作用する力に着目して説明します。また、力はベクトルなので、これまでと同様に、向きと大きさについて分けて考えます。

まず、磁荷の受ける力の向きは、次のように決まります (ビオ・サバールの法則の項を参照, p.58)。電荷の進行方向に対して垂直で、磁荷と電荷とを結ぶ線にも垂直です。このような場合、向きは二通りあります。向きがどちらであるかを決めるのは 1) 電荷の電気量の正負 2) 磁荷の磁気量の正負 3) 電荷の進行方向 の三つです。この場合には、いわゆる**右ネジの法則**として考えると分かりやすいと思います。正電荷の速度ベクトルを右ネジが進む向きに対応させると、右ネジを回す向きが正磁荷の受ける力の向きになります[4]。言葉で説明するより、図を見てもらった方が分かりやすいと思います。

次に、磁荷に作用する力の大きさは、1) 電荷の電気量 2) 磁荷の磁気量 3) 電荷の速さ に比例し、4) 電荷磁荷間の距離の 2 乗に反比例します。また、5) 磁荷から見た電荷の方向と速度の方向とのなす角 θ にも関係して $\sin\theta$ に比例します。

磁荷に作用する力の大きさと向きについてのこうした性質は**ビオ・サバールの法則**に対応した法則として以下のように整理されます[5]。

法則 : ビオ・サバールの法則

磁荷は等速直線運動する電荷から次のような力を受ける。

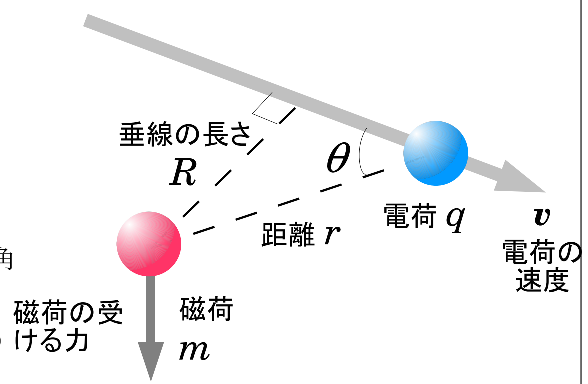
作用する向き

正電荷と正磁荷の組み合わせの場合には、次の図に示す向き。磁荷の極性、電荷の極性、速度ベクトルのうちどれかが反転すれば、力の向きも反転する。

大きさ F

$$F = \frac{m}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\cdot\sin\theta = \frac{m}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\cdot\frac{R}{r}$$

q	:	電荷の電気量 (SI 組の単位 [C])
m	:	磁荷の磁気量 (SI 組の単位 [Wb])
v	:	電荷の速度
r	:	磁荷と電荷の距離
θ	:	電荷から見た磁荷の方向と速度とのなす角
R	:	磁荷から電荷の軌道 (通り道) へ降ろした垂線の長さ (最接近時の距離, $R = r\sin\theta$)



ビオ・サバールの法則に対応した力

こぼれ話 : ベクトルの外積とビオ・サバールの法則

[4]右ネジといわれてもピンとこない人は、水道の蛇口の栓を観察してください。栓をひねると、栓はわずかに移動します。その回し方と栓の移動方向の対応関係は決まっています。栓に用いられるネジが右ネジです。

[5]ここに示したのはビオ・サバールの法則そのものではなく、それに対応する法則です。ビオ・サバールの法則は、作用する力ではなく**磁場** (単位磁気量に作用する力) について成り立つ法則です。また、運動する電荷についてではなく、微小な長さの電流について成り立つ法則です。

ビオ・サバールの法則に対応する法則を学びました。しかし、いろいろなものに複雑に依存していて、面倒であるという印象を受けたと思います。実際そうです。

しかし、ここで書いた複雑な関係について、勉強した人はベクトルの**外積**を使えることに気づくと思います。二つのベクトル (電荷の速度ベクトルと、磁荷を原点にしたときの電荷の位置ベクトル) についての**外積**とは、大きさが、二つのベクトルの大きさの積に $\sin\theta$ (θ は二つのベクトルのなす角) をかけた合わせたものになります。向きは、元の二つのベクトルに垂直です。

ベクトルの**外積**を使うと、よりすっきりした形で表現することができます。脚注にも示したように一般的に知られているビオ・サバールの法則は、向きを持った微小な長さ $\boldsymbol{ds}$ の電流 I が、その電流の位置を原点とした場合の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置に作る磁場 $\boldsymbol{H}$(4.3 節参照) を向きを含めて表したものです。

$$\boldsymbol{H} \quad = \quad \frac{I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

ここで $|\boldsymbol{r}|$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ の大きさ (長さ) を表しています。両辺に磁気量 m をかけると、微小な長さ $\boldsymbol{ds}$ を流れる電流から磁荷が受ける力が分かります。外積 $(\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r})$ を用いると、とてもすっきりした形になりました。

これまでも学んできたように、物理学ではベクトルをたくさん用います。**仕事**の計算では、ベクトルの**内積**を使います。**角運動量**や電磁気学の計算でも外積をよく用います。機会をみつけて勉強してみましょう。

この力にも、**作用反作用の法則**に基づいて、**反作用**があると考えられます。つまり、電荷が動くと、電荷は静止している磁荷から力を受けます。この力の性質については**ローレンツ力**として以下のように整理されます[6]。

法則：ローレンツ力

等速直線運動する電荷は、静止した磁荷から次のような力を受ける。

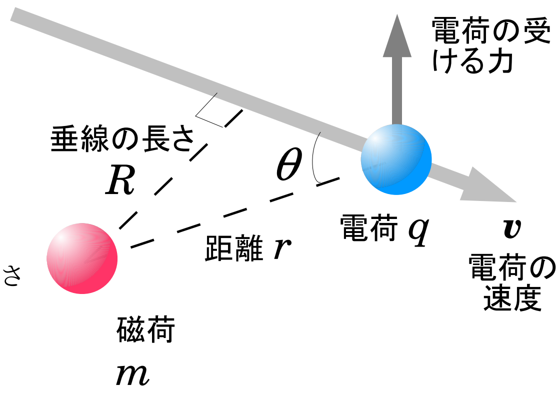
作用する向き

正電荷と正磁荷の組み合わせの場合には、次の図に示す向き。磁荷の極性、電荷の極性、速度ベクトルのうちどれかが反転すれば、力の向きも反転する。

大きさ F

$$F \quad = \quad \frac{m}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\cdot\frac{R}{r}$$

q	:	電気量 (SI 組み立て単位 [C])
m	:	磁気量 (SI 組み立て単位 [Wb])
v	:	電荷の速度
r	:	磁荷と電荷の距離
R	:	磁荷から速度ベクトルへ降ろした垂線の長さ (最接近時の距離, $R = r\sin\theta$)



ローレンツ力

(c) 電荷が静止していて磁荷が運動する場合

逆に、電荷が静止していて磁荷が等速直線運動する場合を考えてみます。その場合にはどのような力が作用するでしょうか (図 4.1 左)。

これを考えるために、力学の問題を考えてみましょう。一定の速度で運動する電車の中で物を落とすと、その物体はどのように落下するでしょうか。電車が進むために取り残されて、進行方向と逆方向に進みながら

[6] ここに示したのはローレンツ力そのものの性質ではなく、それに対応する法則です。一般的には、電場と磁場がある時に、運動している電荷が電場と磁場から受ける力をローレンツ力といいます。ここに示したのは、ローレンツ力に対応する力です。

落ちるでしょうか。そんなことはありません。なめらかに進む電車の中は、止まっているときと全く同じように物体が落下します。落下だけでなく、物理現象はすべて止まっているときと同じなので、電車に乗っている人は、電車が運動していることに気づかないでしょう。このような事実は、ニュートンの**運動の法則**が成り立つような**慣性系**に対して等速直線運動するような座標系も、同様に慣性系であり、全く同じような物理現象が生じることを意味しています。どの慣性系でも同じ物理法則に基づいて現象が生じることを**ガリレイの相対性原理**といいます (6.5 節 参照)。

電磁気学でも相対性原理が成り立つとすれば、どのような慣性系から観察しても電磁気力は同じように作用するはずです。この例に当てはめてみるために、等速直線運動する磁荷と同一の速度で移動しながら観察してみます。すると、磁荷は静止し、電荷が逆方向に等速直線運動することになります。これは先ほど考えた問題と同じです。そこで、電荷と磁荷に作用する力は、磁荷が静止している場合と同様になるでしょう。

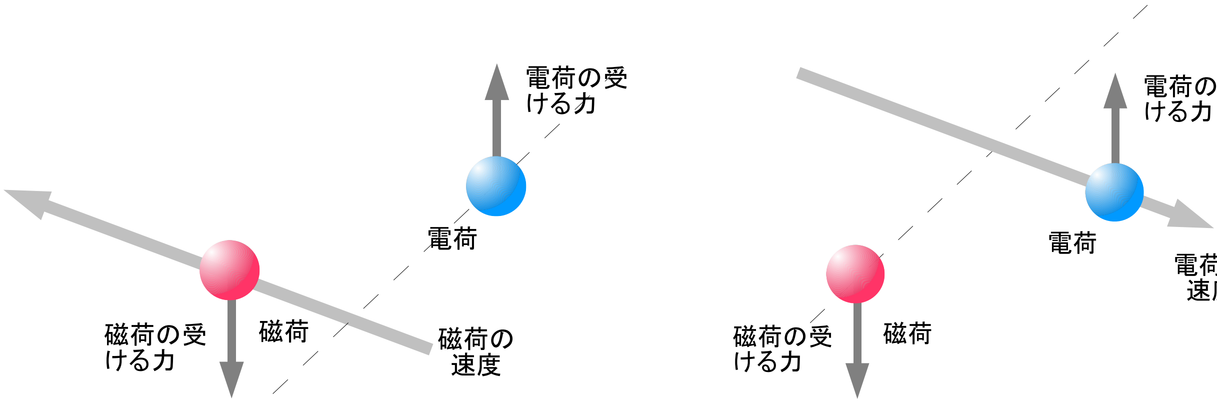


図 4.1: 磁荷と電荷との間で作用する力 (左：磁荷が走る場合、右：電荷が走る場合)

(d) 電荷も磁荷も運動する場合

電荷も磁荷も互いに等速直線運動する場合も同様に、磁荷とともに等速直線運動する座標系で考え、そのときの電荷の速度に対して法則を当てはめて考えれば良いことが分かります。

電荷と磁荷の間に作用する力についての説明は、基本的には以上です。互いに等速直線運動する場合について書き表すことができました。ただし、一つ注意しておきたいことがあります。それは、比例定数についてです。ビオ・サバールの法則に対応した力やローレンツ力を表す式に現れた比例定数は、$\frac{1}{4\pi}$ でした。クーロンの法則に現れたような $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ とか $\frac{1}{4\pi\mu_0}$ が現れず、単位のない $\frac{1}{4\pi}$ だけなのはどうしてでしょうか。それは、電気と磁気が、この関係式で結びついているので、磁気についての単位を調整することで係数を簡単にすることが可能だからです。単位については、「学びの Tips:磁場と磁荷の単位」(p.66) を参照してください。

学びの Tips：電磁気学の流儀と本書の立場

流体力学の大家が晩年に電磁気学の本を書かれました (「電磁気学を考える」サイエンス社 今井功 著)。流体力学で培われた数学を基に、電磁気学を再考する試みです。電磁気学には著名な学者も違和感を覚える部分があるようです。違和感だけではなく、電磁気学の教育には混乱もあります。例えば、電磁気学の教科書には二通りの流儀 (EB 対応と EH 対応、$\boldsymbol{E}$:電場、$\boldsymbol{B}$:磁束密度、$\boldsymbol{H}$:磁場) があり、人によっては EH 対応を激しく批判しています。EH 対応の問題点の一つは磁場の扱いです。実在しない (発見されていない) **単極子**が存在するように理論が組まれています。また、理論的な整合性が EB 対応の方が良いといわれています。

そもそも、磁場について磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ と、どうして両方を使うことになってしまったのでしょうか。どちらか一つを使えばよさそうなものですし、同じようなものが二つあるのは混乱の元です。もちろん、いくつかの理由があります。一つは、両者は基本的に異なると考えられているからです。例えば $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ を結びつける式 (4.4)(p.67 参照) に現れた比例定数 μ_0 は真空中の場合の比例定数です。これが水中だと比例定数は μ_0 とは異なります。

こうした事情は学習者にとっては迷惑な話です。しかし、学問体系が決して神様から与えられたものなのではなく、人間が分かりやすさを考えて、地道に作っているのだ、ということがよく分かる例だと言えるでしょう。

本書は EH 対応の立場をとっています。私たちは磁石というものに慣れ親しみ、磁石には “極” があるという前提

で様々な現象を学校で勉強してきましたので、その感覚は大切にしたいと思います。また、ここで紹介し、これから説明する部分にもあるように、磁荷があるとすると、電荷と磁荷との対応はとてもいいように見えます。そして、高校までで学ぶ電気と磁気についての性質のほとんどは、ここまでで学習した、わずか三つの電荷と磁荷の間に作用する力で理解できます。少数の原理で様々な性質を理解できることは物理学の特徴です。

こうした事情があるので、いくつか気をつけてほしいことがあります。

1. 電磁気学を改めて詳しく学ぶ場合には、本書とは別の枠組みの理論であることを意識してください。
2. 本書では電荷や磁荷が等速直線運動する場合だけを考えていることに特に気をつけてください。力を受けて加速度運動する場合は扱いません。
3. そして、上記のことを踏まえた上で、本書で紹介した電荷と磁荷の相互作用が、高校の物理で学ぶことと、どのように関係づけられるのか、じっくり考えるようにしてみてください。

4.3　力線の電磁気学

ここまで考えてきた電磁気学では、以上の三通りの力 (電荷と電荷、磁荷と磁荷、電荷と磁荷) を基本的な力として考えます。電磁気力について理解できたとすれば、私たちの世界で起こる現象は、万有引力と電磁気力に基づいて、運動方程式を積分することで理解できるように思われます。

ここでは、電磁気力を別の観点から考えたいと思います。その理由の一つは、より簡単な理解ができそうに思うからです。電磁気力を三通りに分類できたので簡単か、というと、そうでもありません。特に電荷と磁荷の場合 (ビオ・サバールの法則やローレンツ力) はとても複雑な印象を与えます。より簡単に理解する方法は無いものでしょうか。もしも、人間にとってより理解しやすい考え方があれば、更にその先まで考察を進めることがしやすくなるので、それを採用すべきです。もう一つの理由は、これまで学んだ 3 通りの力だけでは理解しにくい場合があるからです。例えば、電荷が並んで等速直線運動しているような場合です。電荷と電荷の関係ですから、クーロン力だけが作用するのか、というと、そうでもありません。こうした点についても、考えてみる必要があります。ここで扱う「**電場**」や「**磁場**」はそのようにして考え出されました。実際には 6.3 節で学ぶように、別の理由から「電場」や「磁場」を考える必要性が生じてきます。しかし、その話は後回しにして、以下では電場や磁場についての考え方を紹介し、ビオ・サバールの法則やローレンツ力がどのように表現されるかを改めて整理してみます。

電場とは　磁場とは

ある一つの電荷 (電気量 q_1) だけが存在したとします。もしも、もう一つの電荷 (電気量 q_2) があったとしたらクーロン力が作用することになります。力の大きさは二つ目の電気量 q_2 に**比例**しますから、q_2 を単位電気量 ($q_2 = 1$[C]) とし、二つ目の電荷に作用するであろう力の空間分布が分かれば、いろいろな電気量の電荷を置いたときに作用する力を簡単に知ることができます。そこで、空間中の各点に、そこに単位電気量 (1[C]) の電荷を置いたとしたときに作用する力 (ベクトル) を対応させることを考えます。このように、空間中の各点に対応して物理量が決まる場合、その物理量が分布する空間を、一般に**場**といいます。各点に対応してベクトル量が決まるような場を特に**ベクトル場**といいます。ここで考えている単位電気量当たりの電気力のベクトル場を**電場**といいます[7]。電場は 1[C] 当たりに作用する力を表したものですから [N/C] という単位を用います。また、空間中の各点での電場の向きは、その場所に正の電荷を置いたときにその電荷が受ける力の向きと一致します。

電気と磁気は対応関係がよいので、同様に**磁場**を考えることができます。つまり、場所によって決まる単位磁気量当たりに作用する力のベクトル場を磁場といいます[8]。そこで、磁場の強さは [N/Wb]=[A/m] という単位で表されます[9]。空間中の各点での磁場の向きは、その場所に正の磁荷 (N 極) を置いたときに、その磁荷が受ける力の向きと一致します[10]。**万有引力**ついても場を考えることができます。その場合は**重力場**といいます。

[7]電界 (でんかい) ともいいます。
[8]磁界 (じかい) ともいいます。
[9]磁場の単位については「学びの Tips：磁場と磁荷の単位」(p.66) を参照してください。
[10]なお、クーロンの法則は万有引力の法則と似ているので、万有引力の場合も同様に**重力場**をベクトル場として決めることができます。単位についても同様に決められます。重力場の単位は [N/kg](= [m/s^2]) となります。重力場は**重力加速度**と一致します。

学びの Tips：近接作用と遠隔作用

「場」を考えるのはなぜでしょうか。

電場の場合を考えましょう。一つの電荷が存在すると、他の電荷が存在すれば力が作用するのですから、最初の一つの電荷が存在することによって、空間の性質が変化したと考えます。その空間の性質を「場」と考える訳です。しかし、電場が存在しても、二つ目の電荷を置かない限り、何も力が働きません。二つ目の電荷を置かない限り力が作用しないのですから、場は、単に人間が勝手に想像したものだと言うことができるように思います。実際には場は存在せず、離れた粒子同士が力を及ぼしあっていると考える訳です。

このように、離れた粒子同士が直接的に及ぼしあうと考える力を**遠隔作用**といいます。それに対して、一つ目の粒子によって場ができて二つ目の粒子はそこの場から力を受けると考えたとき、その力を**近接作用**といいます。

このテキストでは、基本的に遠隔作用の立場で説明しています。しかし、遠隔作用であると考えると矛盾や問題点が多いことが分かっています。そして電磁気学は近接作用の立場で成り立っています。つまり、粒子同士は直接力を及ぼしあうのではなく、実際に場が存在して、その場から力を受けるのです。この問題については 6 章で改めて考えましょう。

こぼれ話：原子核の周りの電場

点電荷の作る電場の典型的な例は、原子の中の原子核の周りの電場です。

20 世紀初頭、日本の**長岡半太郎**やイギリスで活動した**ラザフォード**などは、原子の構造は、**原子核**と、原子核の周囲にある**電子**で構成されると考えました。ラザフォードは**放射線**の一種である **α 線** (プラスに帯電した高速の粒子) を原子に当てると大きく跳ね返ることから、原子の中心に正の電荷を持った粒が存在していることを示したのです。

ベクトルによる表示

では、具体的に電場や磁場とはどんなものでしょうか。目にみえないもの、また、紙面で表わしにくい立体的なものを表すには工夫がいります。その工夫の仕方によって複数の表現方法が用いられます。ベクトルをたくさん並べて描くのはその方法の一つです。

1. 電荷の周りの電場

   プラスの点電荷 (電気量 Q) が原点にある場合を考えましょう。すると、ある場所に別の点電荷 (単位電気量 1[C] の電荷であるとします。) を置くと、原点から遠ざかる向きに、力が作用することになります。その大きさは、原点に近い程大きく、原点から離れると小さくなります (**クーロンの法則**)。つまり、いろいろな点に原点から遠ざかる向きのベクトルが描ける訳です。それが点電荷の作る電場となります。点電荷の作る電場を図示してみます (図 4.2 左)。磁荷の作る磁場も同様です。

2. 走る磁荷の周りの電場

   磁荷と電荷が相対的に運動する場合、互いに力を及ぼし合います。“走る” 磁荷が電荷に及ぼす**ローレンツ力**に対応する力 (図 4.1 左) を考えると、運動する磁荷の周りには電場ができると考えられます (図 4.2 中)。磁荷の進行方向に対して左ネジに対応するような、あるいは、握った左手に対応するような電場ができます (図 4.3 左)。手に対応させると覚えやすいでしょう。

3. 走る電荷の周りの磁場

   磁荷と電荷が相対的に運動する場合、互いに力を及ぼし合います。“走る” 電荷が磁荷に及ぼす**ビオ・サバールの法則**に対応した力 (図 4.1 右) を考えると、運動する電荷の周りには磁場ができると考えられます (図 4.2 右)。電荷の進行方向に対して右ネジ (**右ネジの法則**) に対応するような、あるいは、握った右手に対応するような磁場ができます (図 4.3 右)。

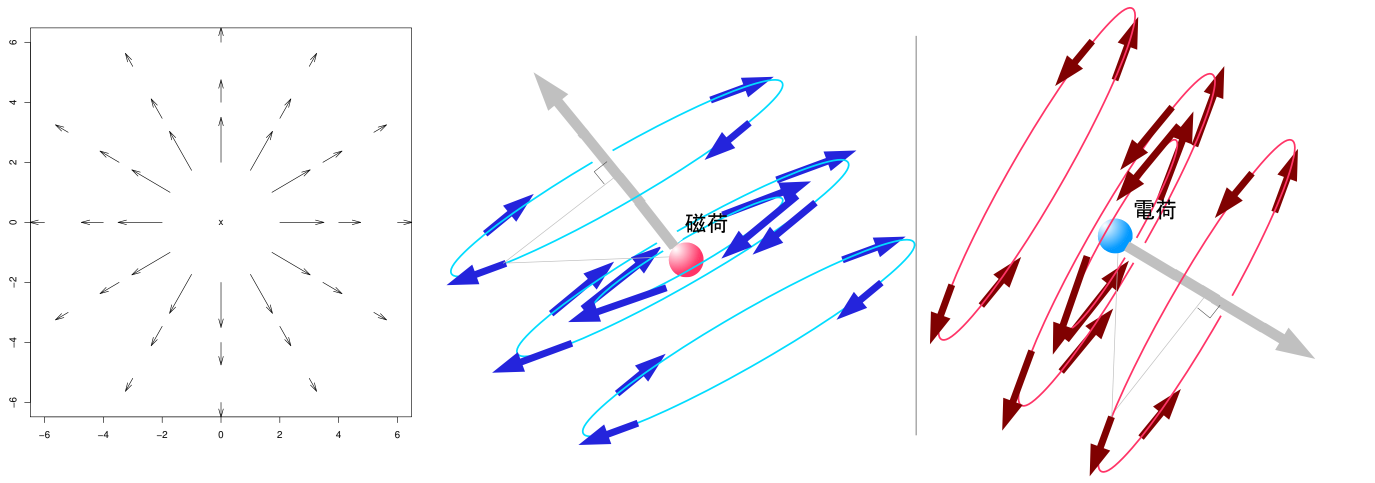


図 4.2: ベクトル場の模式図 (左：点電荷の周りの電場　中：走る磁荷の周りの電場　右：走る電荷の周りの磁場)

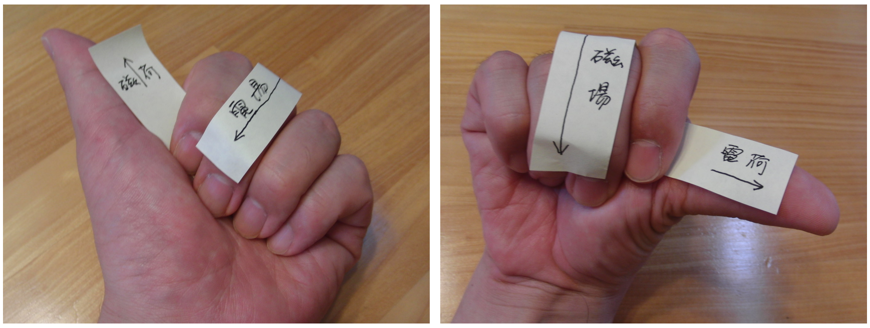


図 4.3: 左:走る磁荷の作る電場 (左手) 右:走る電荷の作る磁場 (右手)

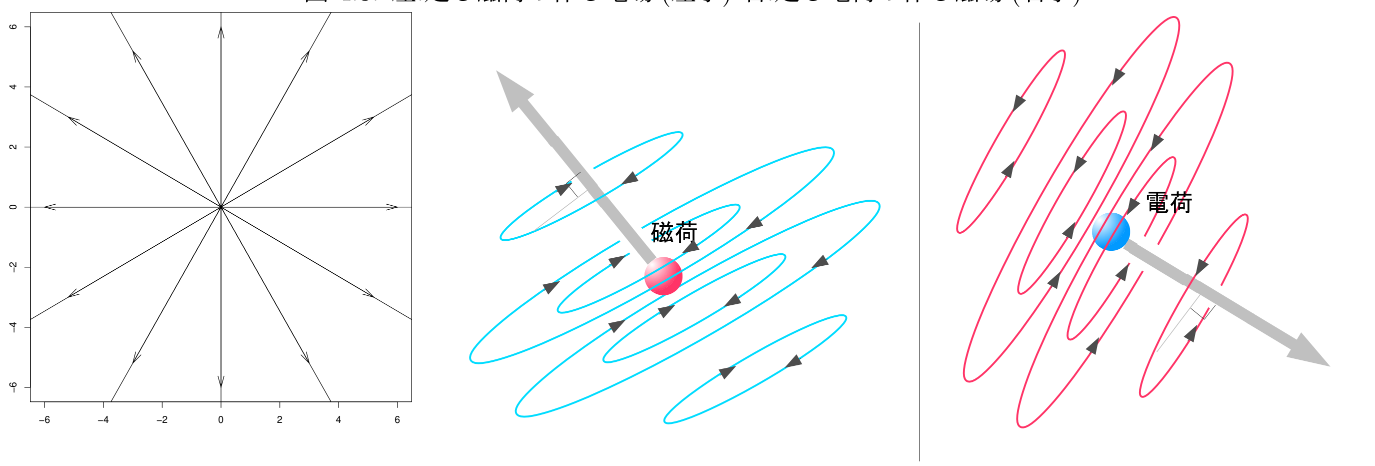


図 4.4: 力線の模式図 (左：点電荷の周りの電気力線　中：走る磁荷の周りの電気力線　右：走る電荷の周りの磁力線)

電気力線による表示

電場に沿って滑らかにつないだ線を**電気力線**といいます。同様に、磁場の場合には**磁力線**といいます。ただし、万有引力に対応した重力線という言葉はありません。電気力線と磁力線を合わせて**力線**といいます。電場の様子を電気力線を用いて表すこともあります。電気力線の特徴は次のような点です。

(a) 電場は、電気力線の接線方向になっている。

(b) 電気力線に端がある場合には、正電荷から出発して、負電荷に達する。

(c) 電場の強さ (電荷を置いたときの力の強さ) は、電気力線の込み具合に対応している。

磁力線についても同様に考えることができます。これらの情報を基にして、点電荷の周りの電場、走る磁荷の周りの電場、走る電荷の周りの磁場について考えてみます。

1. 電荷の周りの電気力線

   正の電荷を持った点電荷が作る電場は、電荷から放射状に伸びる電気力線によって表現されます (図 4.4 左)。負の電荷は無限に遠いところにあると想定しています。

2. 走る磁荷の周りの電気力線

   この場合、電荷はありません。そして、それに対応して、電気力線には端がなく、ループ状になっています (図 4.4 中)。電気力線が作る閉じた円のの中心は磁荷の進路上にあります。

3. 走る電荷の周りの磁力線

   磁力線には端がなく、ループ状になっています (図 4.4 中)。磁力線が作る閉じた円の中心は電荷の進路上にあります。

ここで気をつけておきたいのは、電気力線が、「そこに荷電粒子を置いたときに、その荷電粒子がたどる経路」では **ない** ということです。電気力線は力の向きを与えるだけ、つまり、加速度の向きを決めるだけで、速度とは一致しません。速度と加速度の向きが一般に違うことは既に勉強しました。例えば等速円運動 (3.11 節) がそうでした。点電荷の作る電場の場合は例外的です。電場は点電荷から遠ざかる向きしかないので、任意の静止していた点電荷の場合は、例外的に、ずっと電気力線上をたどることになります。

力線による電磁気力の考え方

電場や磁場という考え方を導入したことによって、二つの物体の間に作用する力を、電荷や磁荷の周りの空間の性質としてイメージできるようになりました。電場や磁場を表す**力線**は、**マイケル・ファラデー** (1791-1867) が考え出したものです。ファラデーは、力線に次の 2 つの性質があると考えれば様々な現象を説明できると考えました。

- 力線はゴムひものように縮もうとする。
- 力線はゴムのチューブをまとっているかのように隣り合う力線の間では反発し合う。

これらの力線の性質を用いて、電磁気力や電場・磁場の性質を説明することを試みてみます。

1. 点電荷の周りの電場 (図 4.5 左)

   正の電気量を帯びた点電荷を考えましょう。電気力線は正電荷から発せられますから、点電荷からも電気力線が伸びています。このとき、均等に等方的に電気力線が伸びているのは、電気力線が互いに反発するからであると考えることができます。

2. 異符号の点電荷の間に作用する引力 (図 4.5 中)

   異符号の点電荷の組があったとします。すると、正電荷から出た電気力線は負電荷に入り込み、両者は電気力線で結ばれます。電荷に引力が作用するのは、電荷間の電気力線が、線の方向に沿って短くなろうとするからであると考えることができます。

3. 同符号の点電荷の間に作用する斥力 (図 4.5 右)

   二つの正電荷を考えます。どちらからも電気力線が出ています。電荷の間ではそれらは混み合い、大きく曲げられるでしょう。2 つの電荷が互いに反発し合うのは、電気力線は反発して広がろうとし、そうした電気力線に電荷が引っ張られるからであると考えることができます。

4. 静止している電荷と走る磁荷の間に作用する力 (図 4.6)

   まず、静止している電荷と、紙面に向かって手前から奥の向きに走る磁荷が、それぞれ単独で作る電場を電気力線で表します (図 4.6 左)。電荷からは放射状の電気力線が出ます。走る磁荷の周りには環状の電場ができます。

   ところが、力線は交わってはいけません。そこで、これらの電場を重ね合わせた電気力線は図 4.6 の右側のようになるでしょう。磁荷が上向きの力 (**ビオ・サバールの法則**に対応) を受けるのは、曲がった電気力線同士の反発する力によると考えることができます。一方、電荷が下向きの力 (**ローレンツ力**に対応) を受けるのは、電荷から出る電気力線がゆがめられ、電荷が下に引っ張られるようになると考えることができます。

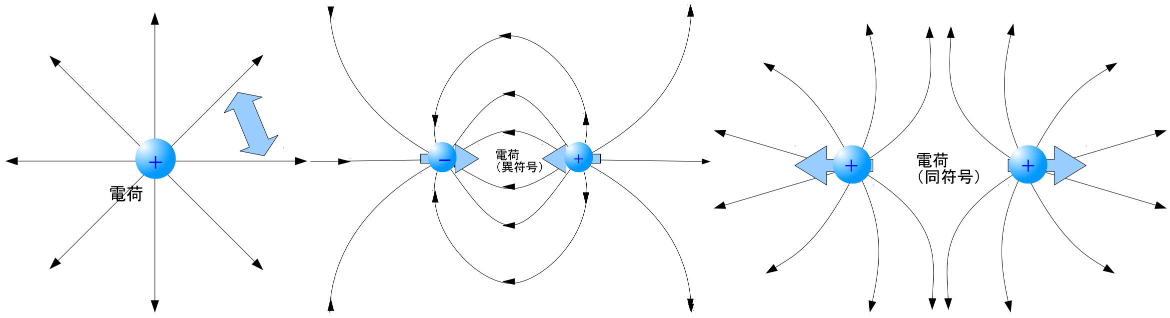


図 4.5: 電気力線による説明 (左) 点電荷の周りの電場 (中) 互いに引き合う電荷 (右) 反発し合う電荷

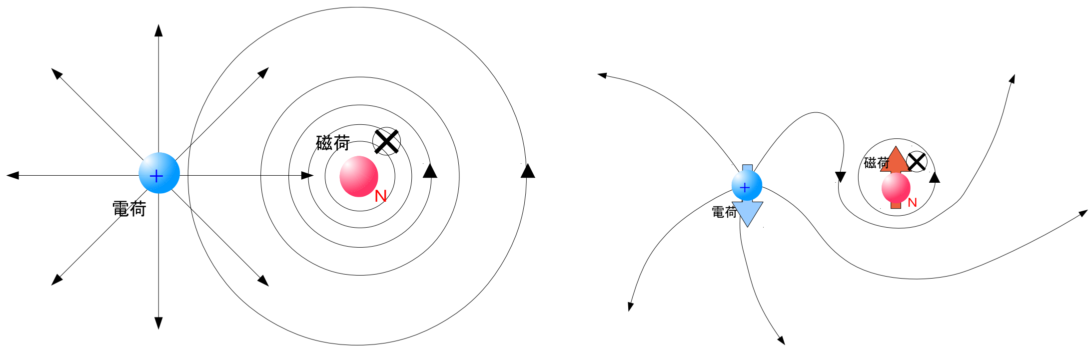


図 4.6: 電気力線による説明 (左) 電荷と走る磁荷の作る電場を単独で表したもの (右) 重ね合わせた電場の電気力線

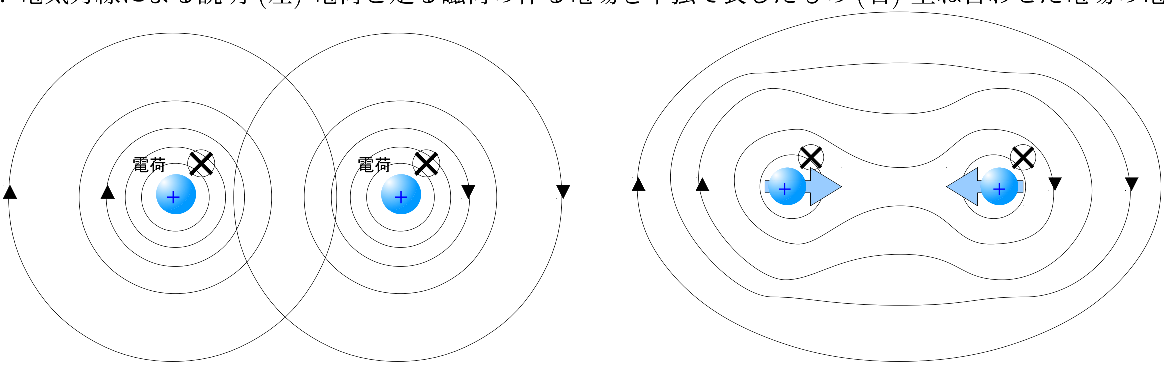


図 4.7: 電気力線による説明 (左) 並走する電荷が作る磁場を単独で表したもの (右) 重ね合わせた場磁場の磁力線

5. 並走する電荷の間に作用する力 (図 4.7)

   最後の例は、これまで考えてこなかった問題です。二つの正電荷が一定の距離を保って、紙面手前から奥に向かって等速直線運動する場合を考えます。二つの電荷の間には、クーロン力による斥力が作用します。しかし、それ以外の力も作用します。運動に伴って引力が発生するようになるのです。

   この引力は、二つの並走する電荷を取り巻く磁力線を見ることで理解することができるでしょう。前の例と同様に、個々の走る電荷が作る磁場 (図 4.7 左) を重ね合わせると、図 4.7 の右のようになると考えられます。磁力線は互いに反発しますから、磁力線が混み合っている外側から、磁力線が少ない内側に向かって電荷が押されるようになると考えられます。すなわち、引力が作用するようになります。

   このような引力は、電荷と磁荷の相互作用の考え方で理することは困難であることを強調したいと思います。

4.4　電流

電流を考えること

原子論の発想で、物質が粒子であると考えると、力の性質と運動方程式を用いれば、様々な現象を予言することが原理的には可能です。しかし、その数が膨大であるために、現実問題として、粒子一つ一つについて加速度を求めてこれを積分することは不可能です。また、物理学の歴史からすると、物質が粒子で構成されていることが分かったのは最近

のことです。それまでは粒子の組織だった運動を考えることが最初から行われていました。

そこで、ここでは**粗視化**をします。すなわち、粒子一つ一つの運動を扱うのではなく、粒子の集団の組織だった運動を扱います。粗視化は一種の近似であるとも言えます。しかし、その代わり、粗視化することによって人間が理解できる範囲が格段に広がることになります。ここで扱う**電流**は細かな電荷 (多くの場合、負の電荷である**電子**) の流れであり、荷電粒子の組織だった運動を粗視化したものです。

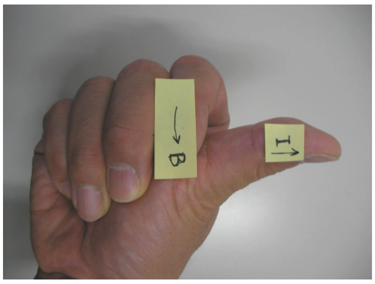


図 4.8: 電流の周りに発生する磁場の向き

電流の作る磁場 – アンペールの法則 –

ビオ・サバールの法則で学習したように、電荷が運動するとその周りの磁荷は力を受けます。つまり磁場ができます。そこで、電流の周りには同様に磁場が発生します。運動する正電荷の周りの磁場と同様に、電流の場合も**右ネジの法則**が成り立ちます。すなわち、電流の流れる向きに右ネジの進む向きを一致させると、磁場の向きが右ネジを回す向きと一致します (図 4.8)。この図を、走る電荷の周りの磁場の様子を表した図 (図 4.3 右 p.62) と見比べてみましょう。

電流の周りの磁場の強さは、**アンペールの法則**によって記述されます。アンペールの法則は、直線状の電流 I の周りにできる磁場の強さ H を表したものです[11]。

法則：アンペールの法則

直線電流の周りの磁場については次のようになる。

磁場の向き

図 4.8 に示す向き。磁力線は、電流と垂直な面内で、電流の位置を中心とする円を描く。

磁場の強さ

磁場の強さ H は電流 I と電流からの距離 R を用いて次のように表すことができる。

$$H = \frac{I}{2\pi R} \tag{4.1}$$

磁場は単位電気量当たりに作用する力である。そこで、直線電流の近くに置いた磁荷 m は $mH = m \times \frac{I}{2\pi R}$ だけの力を受ける。

こぼれ話：アンペールの法則の導出

アンペールの法則をビオ・サバールの法則に対応する法則 (p.57) から求めてみましょう。積分を使って難しくなるのでコラムにしました。積分を使い慣れている人は読んでみてください。

まず、導線内に含まれる正の電荷 q が速度 v で移動しているとします。ある断面を**単位時間** (1[s]) 当たりに通過する電荷が電流となります。ここで、導線の**単位長さ** (1[m]) 当たりの電荷の数を n とします。すると、電流を I について次の式が成り立ちます。

$$I = nqv \tag{4.2}$$

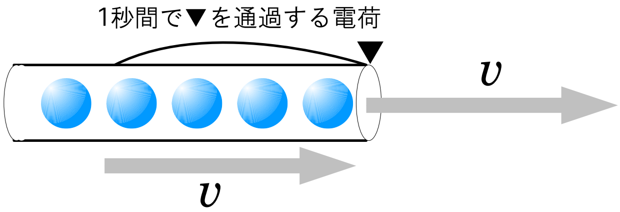


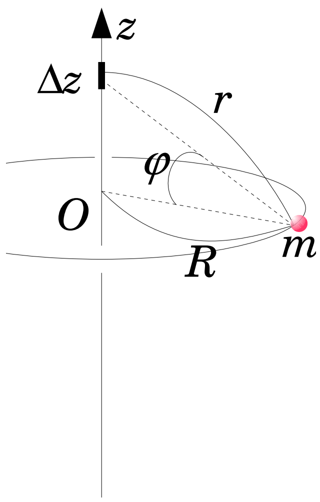
図 4.9: 運動する電荷と電流

図のような位置にある磁荷 m は、ビオ・サバールの法則によって直流電流上の微小な長さ Δz から次のような力を受けます。

[11] ここで示したアンペールの法則は直線電流の周りの磁場という特殊な場合についてのものです。より一般的に表現することができます。

$$\frac{mqv}{4\pi r^2}\ \frac{R}{r}\ n\Delta z$$

ここで、n は**単位長さ**当たりの電荷の数で、$n\Delta z$ が Δz 内にある電荷の数になります。また、電流 I は、nqv になることを思いだしましょう。これを z について $-\infty$ から ∞ まで考えて足し合わせると求めるものになります。このような足し合わせは積分で表現されます。



$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{mqv}{4\pi r^2}\ \frac{R}{r}\ n\,dz &= \frac{mnqv}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^2}\ \frac{R}{r}\ dz \\
&= \frac{mI}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{R^2}\cos\varphi\frac{dz}{d\varphi}\ d\varphi \\
&= \frac{mI}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{R^2}\cos\varphi\frac{R}{\cos^2\varphi}\ d\varphi \\
&= \frac{mI}{4\pi R}\left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = m\times\frac{I}{2\pi R}
\end{aligned}$$

このような積分の利用方法は、物理学に現れる積分の典型的な例の一つです。微分法や積分法を勉強したら、改めてこのコラムを見直してみてください。

学びの Tips：磁場と磁荷の単位

SI の**磁場**の単位を考えてみましょう。ここでは、これをアンペールの法則 (式 4.1) から考えます。アンペールの法則が成り立つとすると、磁場の SI 組み立て単位は [A/m] となります。

次にアンペールの法則から**磁荷**の単位を考えてみましょう。磁場の単位は [A/m] 以外にも、磁場の定義から [N/Wb] と表せます (p.60)。これらは同一の単位なので次のようにして [Wb](**ウェーバー**) を SI 基本単位で表すことができることがわかります。SI の基本単位には、磁場や磁荷のために特別な単位はありません。しかし、この結果を見ると、その必要がないことが分かります。電荷との相互作用があるので、電流の SI 基本単位 [A] を使って表せるからです。

$$\begin{aligned}
\frac{[\mathrm{A}]}{[\mathrm{m}]} &= \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Wb}}\right] \\
[\mathrm{Wb}] &= \left[\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{A}}\right]
\end{aligned}$$

アンペールの法則 (その基になる**ビオ・サバールの法則**) と**ローレンツ力**は、**比例定数**が簡単で単位のない数値 ($\frac{1}{2\pi}$ とか $\frac{1}{4\pi}$) になっています。運動方程式の比例定数を 1 にして力の単位を決定しました (3.7 節「力の単位」参照)。同じように、電気と磁気の間の相互作用について係数が簡単になるように磁気に関係した単位が作られているといえます。

電流が磁場から受ける力 –アンペールの力–

ビオ・サバールの法則による力の反作用と考えられるのは、**ローレンツ力**でした。ビオ・サバールの法則がアンペールの法則に対応したように、ローレンツ力に対応して、磁場中の導線に電流を流すと、導線が力を受けると予想されます。電流が磁場を作り、磁場を作る磁荷に及ぼす力の反作用として、電流が力を受けると考えることもできます。実際、磁場中の電流は力を受けます。この力を**アンペールの力**といいます。

アンペールの力の向きを説明する法則は、**フレミングの左手の法則**です (図 4.10)。この図をローレンツ力の向きの図 (図 4.1 右, p.59) と比べてみてください。

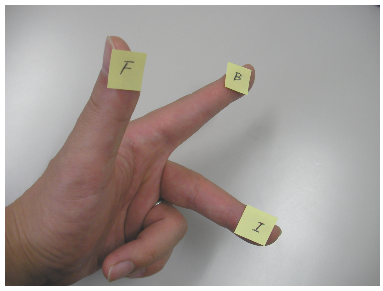


図 4.10: 磁束密度 (B) 中を流れる電流 (I) に作用する力 (F)

アンペールの力の作用する向きと大きさを以下にまとめます。

法則：アンペールの力

磁場中を流れる直線電流は、**単位長さ**当たり次のような力を受ける。

作用する向き

図 4.10 に示す向き (フレミングの左手で示される向き)。
磁場、電流のどれかの向きが反転すれば、力の向きも反転する。

大きさ F

$$f = I \times B \times \sin\theta \tag{4.3}$$

f	:	磁場が導線に及ぼす単位長さあたりの力 (SI の単位 [N/m])
I	:	電流 (SI の単位 [A])
B	:	磁束密度 (SI の単位 [T]=[N/m·A], **テスラ**)
θ	:	磁場の向きと電流の流れる向きとのなす角

ここで、電流に作用する力は単位長さ当たりになっていることに気をつけてください。**磁束密度**は磁場の強さに関係した量で、SI 組み立て単位は [T](**テスラ**) です[12]。磁場 H も磁束密度 B も、磁場を表す量です。真空中の場合には、この二つは比例定数 μ_0 を使って定数倍の関係で結びつけられています。

$$B = \mu_0 H \tag{4.4}$$

μ_0 は磁荷に関するクーロンの法則 (p.56) に現れた真空の**透磁率**です。電流と磁気の相互作用を考える場合、磁場の強さ H に対して、真空の透磁率 μ_0 を掛けた**磁束密度** B を使うことが多いので気をつけてください。

こぼれ話：アンペールの力の導出

式 (4.3) で表される力の大きさを、ローレンツ力 (p.58) を基にして考えてみます。少し難しいのでコラムにしました。

ローレンツ力の大きさに n(単位長さ当たりの電荷の数) を掛ければ、磁荷 m の近くを流れる単位長さの電流に作用する力が分かります。

$$\begin{aligned} nF &= \frac{m}{4\pi}\frac{nqv}{r^2}\cdot\frac{R}{r} \\ &= \frac{m}{4\pi r^2} I \cdot \frac{R}{r} \end{aligned}$$

ここで、電流と電荷の対応を表す式 (式 4.2, p.65) を用いました。$\frac{m}{4\pi r^2}$ の部分について考えましょう。磁場についてのクーロンの法則 (p.56) と磁場 H が単位磁荷当たりに作用する力であることを考えると単極子の周りの磁場 H は

$$H = \frac{m}{4\pi\mu_0 r^2}$$

です。また $\frac{R}{r}$ は磁場と電流のなす角 θ を用いて $\frac{R}{r} = \sin\theta$ と表せます。そこで、これらを見比べてれば、結局次のようになります。(真空中で考えて、磁場 H を μ_0 倍したものを磁束密度 B としました。)

$$\begin{aligned} nF &= \mu_0 H I \sin\theta \\ &= B I \sin\theta \end{aligned}$$

学びの Tips：磁束密度の単位

磁束密度 B の SI 組み立て単位 [T](**テスラ**) についても、基本単位でどのように表されるか考えてみましょう。その

[12] 詳しくはコラム「学びの Tips:磁束密度の単位」(p.67) を見てください。

ために、アンペールの力についての式 (4.3) を使ってみます。すると、[T] について次のような関係が成り立ちます。

$$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] = [\mathrm{T}][\mathrm{A}]$$

そこで [T] = [N/A m] = [kg/s^2 A] となります。[T] = [Wb/m^2] でもあります。磁場の単位が [A/m] であることを考えると、透磁率の単位は [N/A^2] = [kg m / s^2 A^2] となります。

電磁誘導

最後に、静止している磁石に対して導線を動かすことを考えましょう (図 4.11)。この例は発電に関係するので、とても大切な応用例です。

導線の中には電荷 (具体的には電子) があります。電荷は導線と共に運動しているので、電荷と磁石が相対的に運動すると、この電荷に対して**ローレンツ力**が作用します。電荷に力が作用し、流れようとするということは、今考えている導線の部分に**電圧**が生じていることを意味します。このように、導線と磁石の相対的な運動によって電圧が生じることを**電磁誘導**といいます。また、このときに生じた電圧を**誘導起電力**といいます。

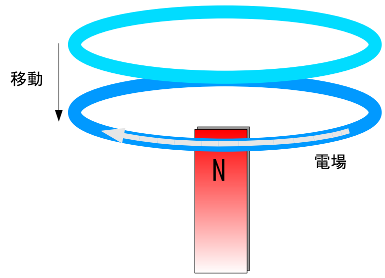


図 4.11: 磁石の近くでコイルを動かすことで発生する電場

誘導起電力の向きは、ローレンツ力の説明 (58) に基づいて考えても、運動する磁荷の周りの電場 (図 4.2 中, あるいは 図 4.3 左, p.62) を考えても分かります。また、N 極から磁力線が放射状に伸びていることを考えて、フレミングの左手 (図 4.10 p.66) を適用することでも理解できます。

電磁誘導の性質は運動を電力に変える際に使えます。水力発電、火力発電、原子力発電では蒸気や水の流れをタービンで回転運動に変換します。タービンに接続された発電機は電磁誘導によって発電します。

平行電流間に作用する力

4.3 節で並走する二つの電荷を扱いました。その結果、クーロン力による反発力とは別に、互いに引き合うような力が生じることがわかりました。これを考えると、真空中に平行に張られた 2 本の導線に電流を流すと電流同士が力を受けることが予想されます (図 4.12)。特に導線の場合、導線自身は電気的に中性なので、クーロン力は作用せず、引き合う力だけが作用することになります。これは**アンペールの法則**と**アンペールの力**を考え合わせることで説明できます。

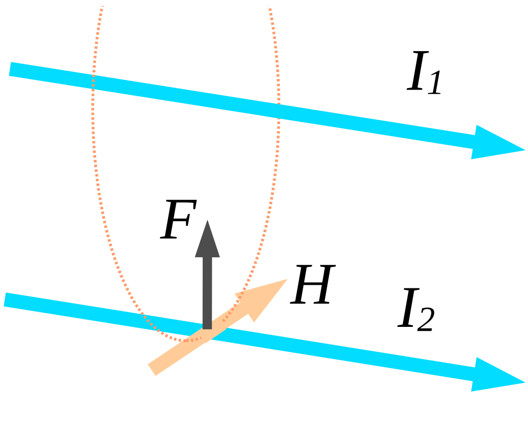


図 4.12: 平行して流れる電流に作用する力

図 4.12 で考えましょう。電流 I_1 が電流 I_2 の場所に作る磁場は電流間の距離を r とすると、アンペールの法則により $\frac{I_1}{2\pi r}$ です。この磁場が電流 I_2 に及ぼす力の大きさは単位長さ当たり $I_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ となります。並んで走る電荷同士に作用する力 (図 4.7) と対応することを確認しておいてください。

こぼれ話 ： 雷で割れる木

雷が落ちて、木が割れる現象について、聞いた話を書いてみます。

雷は高くて尖ったものに落ちやすいことが知られています。木はそのような条件を満たしていますので、木に雷が

落ちることは珍しいことではありません。木の中で水分が比較的多いのは表面付近です。水は電気を通しやすいので、木に雷が落ちると、電流のほとんどは木の表面に沿って流れます。

ところが、この節で考えてもらったように、平行して走る電流は互いに引き合います。そこで、木の幹はぎゅっと締めつけられ、弾性のエネルギーをため込むことになります。雷による放電が停止すると、電流も無くなり、幹を締めつけていた力がなくなります。そのため、幹は弾性によって一気に膨らみ、その勢いで幹が破裂するそうです。

雷で電気が流れたときではなく、流れ終わってから幹が割れるというのを興味深く思いました。

4.5 電流とエネルギー

電圧

前節で誘導起電力について学びました。誘導起電力は、「力」と書いてありますが、**電圧**であり、電圧は力ではなく、むしろ、エネルギーと関連しています[13]。

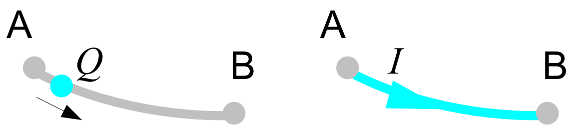


図 4.13: AB 間に電場があるとき、電場が電気量 Q にする仕事 (左) と、流れる電流 I による仕事率 (右) を考える。

ここで、きちんと電圧を定義してみることにします。まず、電場の中に点 A, B があるとします (図 4.13)。電気量 Q の電荷が A から B に移動するとき、電場による力が荷電粒子にした**仕事**を考えます。電場による力が Q に比例するので、仕事も Q に比例するはずです。そこで、この仕事を $Q\phi$ と表すことにします。この**比例定数**に当たる ϕ を AB 間の電圧 (B を基準にした AB 間の電位差) といいます。単位電荷量当たりの仕事になりますので、SI の単位 [V](**ボルト**) は、[J/C] と等しくなるように定められています。

仕事率

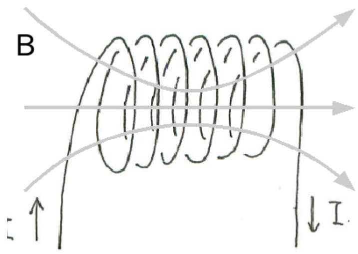
より実生活に関係があるのは、電気量 Q よりも、電流 I との関係です (7.1 節参照)。電流と電圧の積 $I\phi$ という量を考えてみましょう。電流が、**単位時間** (1[s]) 当たりに流れる電気量であることを考えると、$I\phi$ は、電場が、単位時間 (1[s]) 当たりに流れた電気量にする仕事です。単位時間 (1[s]) 当たりの仕事を**仕事率**といいます。特に、電流による仕事率は**電力**といいます。仕事率 (あるいは電力) の SI の単位は [W](**ワット**) です。定義から分かるように、[W] = [J/s] となります。

課題

1. 1[C] と -2[C] の二つの電荷が隣り合っているとき、その周りの電場の様子を、たくさんのベクトルを用いて書き表してみよう。また、電気力線について描き表してみよう。
2. 1[C] と 3[C] の電荷が 1[m] 離れていたとします。これらの電荷にどのような力が作用するでしょうか。力の大きさと向きを答えて下さい。ただし、$\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$[C^2/Nm^2] とします。また、計算機を用いずに、2 桁目を四捨五入して 1 桁の精度で求めてみてください。
3. 磁荷同士に作用する力について考えます。3[Wb] と 6[Wb] の磁荷が、1[m] 離れていたとします。これらの磁荷にどのような力が作用するでしょうか。力の大きさと向きを答えて下さい。ただし、$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [N/A^2] とし、計算機を用いずに、2 桁目を四捨五入して 1 桁の精度で求めてみてください。
4. 静止している磁荷と、その横を等速直線運動する電荷を考えます。磁荷を 4[Wb] 電荷を 1 [C]、電荷の 速さを 3[m/s] とし、電荷が磁荷に最も近づいたときに 1[m] 離れていたとします。もっとも近づいたときに、両者にはどのような力が作用するでしょうか。力の大きさと向きを答えて下さい。ただし、$\pi = 3$ とし、計算機を用いずに、2 桁目を四捨五入して 1 桁の精度で求めてみてください。

[13] 物理学用語でさえ、整合的な表現が使われないことがある例であると言えます。

5. 以下の問題は電気と磁気に関係した力の向きについてたずねたものです。向きについて答えて下さい。その際、文章でどうしてそのような向きになるのか、説明するとともに、必ず図を用いて下さい。
   (a) 正の電荷を真上に打ち上げます。地球の磁場によって電荷が受ける力の向き。ただし、地上の磁場の向きは北向きであるとします。
   (b) 磁石の N 極に対して遠くからコイルを近づけます。ただし、磁石がコイルの面に対して垂直になるように近づけるとします (図 4.11,p.68)。このときの誘導起電力の発生する向き (正の電荷が移動しようとする向き)。
   (c) 二つの正の電荷を考えます。クーロンの法則によってそれぞれに電荷に作用する力の向き。
   (d) 平行して同じ速度で運動する二つの正の電荷を考えます。それぞれの電荷についての電荷が走っていることによって発生する力の向き。クーロン力を除きます。
6. 導線を図のように巻いたものを**コイル**といいます。コイルに電流を流したときにコイルの周辺では次の図のような磁場ができることを説明してください。



7. 定義や法則に基づいて次の物理量や定数の単位を SI の基本単位で表してみましょう。
   (a) 磁場　(b) 磁束密度 (c) 磁荷　(d) 仕事率

第5章　振動と波動

力学の重要な目標の一つは、物体の運動について未来を予測することでした。しかし、物体を構成する粒子 (電子や原子) の数は非常に多く、現実的にそれらの運動方程式を全て積分することは困難です。そこで、電磁気学では、電荷一つ一つを扱うのではなく、組織だった電流として扱うこと (**粗視化**) をし、電流についての性質を検討しました。似たように、物質粒子一つ一つを扱うのではなく、粒子の集団を連続的な物体 (**連続体**) として扱い、その組織だった運動を考えるアプローチがありえます。特に、**波** (あるいは**波動**) は興味深い対象です。

波動が興味深いのは、世の中は、意外にも波で満たされているからです。まず、物質そのものは波の性質を持っていることが知られています。世の中の物質を構成する電子や原子核などは、波の性質を持っているのです。(詳しくは**量子力学**で学習します。) また、光や電波 (これらは両方とも**電磁波**と呼ばれるものです。) も、音や地震も、海のうねりや津波も波です。その他にも、大気中、海洋中、地球の外側の電離圏にも様々な種類の波があります。

波にはエネルギーを遠くへ運ぶ性質があります。そのため、波が発生した場所から遠く離れた場所に影響を及ぼします。例えば太陽から出た電磁波は、宇宙空間を通り抜けて地球に届き、地球を暖めたり、太陽電池で電気に変わったりします。波の性質をうまく使うことで、見えないものが見えてくることもあります。例えば、地球の内部がどうなっているか、について、人間はいろいろな知識を持っています。しかし、人間は地面をわずか数 km しか掘ることに成功していません。それよりも深い場所の様子が分かるのは、地震などの波の性質を利用しているからです。波は情報を伝えることもあります。テレビ放送や携帯電話の電波、あるいは私たちが話す音声を考えると、それはすぐ分かります。このように、波は様々な場面で登場し、重要な役割を果たしています。

波は振動が規則的に伝わる現象です。そこで、この章では、波を考える際にあらかじめ知っておく必要がある**振動**についての理解を深め、その後で、波の性質について簡単に触れます。

こぼれ話：波動と物体の運動

念のために強調しておきたいのは、波は物体その物が伝わってきている訳ではないということです。例えば、地震は、震源での岩盤の破壊によって始まります。しかし、その岩盤が地表まで飛んでくる訳ではありません。大地は基本的には移動せず、各地点での振動が伝わってきているのです。海の波の場合も基本的にはそうです。チリで地震があったときに、日本でも津波が観測されます。ところが、海の水がチリから流れてくる訳ではありません。この点は誤解しやすいので気をつけておきましょう。

こぼれ話：創発

本文で波の種類が多いことを書きました。波ができる理由は様々です。しかし、その理由の違いにかかわらず、共通した性質が現れてきます。このように、現象には階層構造があって、下位の仕組みがあって、上位の現象 (ここでは波) が現れることがあります。そして、下位の現象がどのようであっても、上位の現象が共通した性質 (波としての性質) を持つことがあります。

物理学に限らず、世の中にはこうした階層構造が時々現れます。それを**創発**といいます。例えば、蟻は巣を作ります。1 匹の蟻は、巣の設計図を考えているとは思えません。だから、1 匹の蟻は、その本能に従って行動しているだけです。これが下位の仕組みです。ところが、それが集まると、巣が形成されます。これが上位の現象です。蟻の本能は、蟻の種類によっても違うでしょう。けれども、巣が形成されるというのは、共通した現象です。

創発の観点から、世界を見てみることを意識してみてください。

5.1 単振動

振動を考えるために、図 5.1 のような、バネについたおもりの運動を考えてみましょう。x 軸は、紙面に向かって右

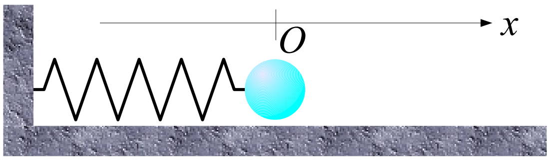


図 5.1: バネについたおもり

側を正にとり、伸び縮みが無い点を原点にとっています。バネの弾性力は原点に戻ろうとする力 (**復元力**) です。その大きさは、伸びや縮み (原点からの**変位**) に近似的に**比例**します。このように、弾性体の場合に、伸び縮みに比例した復元力が作用することを**フックの法則**といいます。

おもりの運動について考えてみます。そのために、変位 (伸び縮みの量)x に比例した復元力が作用する場合の**運動方程式**を考えてみましょう。

$$-kx \quad = \quad m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{5.1}$$

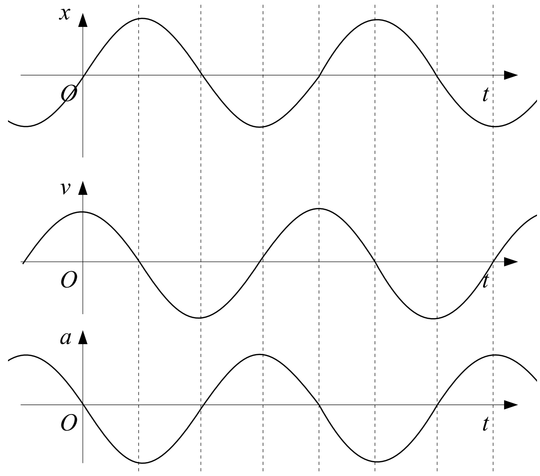


図 5.2: 単振動の変位 (上), 速度 (中), 加速度 (下)

左辺はフックの法則による復元力を表しています。変位 x に比例する復元力ですので、x が正のときには負の向き、x が負のときには正の向きに作用するように、負の符号 (負号, マイナス) がついています。k は**バネ定数**と呼ばれる比例定数で、大きいほど同じ変位に対して復元力が大きくなります。右辺は質量 m と x 方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$ の積です。

これで運動方程式が立てられました。この運動方程式を満足するような x を時間の関数として求めることができれば、バネにつながったおもりの運動 $x(t)$ が分かるはずです。この運動方程式は、x の時間 t についての微分を含んだ**微分方程式**です。このタイプの微分方程式、具体的には、x を 2 階微分すると x の定数倍 (具体的には $-k/a$ 倍) になるようなタイプの微分方程式はとても基本的なタイプです。

それでは、このタイプの微分方程式について、$x(t)$ がどのように求まるのか、考えてみましょう。実は、このタイプの微分方程式については、既に扱った練習問題が役立ちます。答えは図 5.2 のようになります。このグラフを見て分かるのは、変位のグラフ (図 5.2) の上下をひっくり返すと加速度のグラフと同じような形になるということです。それは何を意味するかというと、変位 $x(t)$ を時間について 2 階微分すると、負号がついて、$-x(t)$ に**比例**するようなグラフが得られるということです。これは、今回考えている振動の運動方程式と同じ性質です。

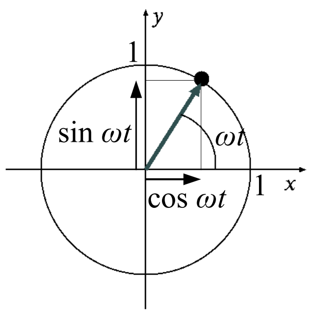


図 5.3: 三角関数の定義

ここからは、やや数学的な扱いになります。上記の変位のグラフは、$x(t) = A\sin\omega t$ と書き表すことができます。ここで、A と ω(オメガ) は定数です。その意味は後ほど改めて考えます。sin(サイン) は**正弦関数**を表しています。関数ですから、$\sin(t)$ と書きそうなものです。しかし、正弦関数を含む**三角関数**は $\sin t$ というように () を用いないのが普通です。三角関数については、図 5.3 を見てください。**ラジアン**で表された角度 ωt に対して、$\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ とはそれぞれ、図 5.3 のように定義されます。すなわち、半径 1 の円 (単位円) の円周上の 1 点をとり、その点が原点から見て x 軸と角 ωt をなしているなら、その点の x 座標が $\cos\omega t$ であり、y 座標が $\sin\omega t$ となります。このように、変位に比例した復元力が作用した結果として実現する三角関数で表される運動 ($x(t) = A\sin\omega t$) を**単振動**といいます。

改めて振動の変位 $x(t) = A\sin\omega t$ について考えてみます。まず、定数 A について考えてみましょう。定数 A は、正弦関数 $\sin\omega t$ の最大値が 1 であることを考えると、単振動の変位の最大値、すなわち振れ幅 (**振幅**) を表していること

が分かります。次に定数 ω について考えてみます。正弦関数の $\sin\omega t$ の **引数** (ひきすう:関数に与える変数) である ωt は、経過時間 t に**比例**しています。そして、その比例定数が ω です。そこで、進んだ距離が速さと経過時間の積に等しいことに似て、角度が ω と経過時間の積とで表されることから、ω を**角速度**といいます。すなわち、角速度 ω は、**単位時間** (1[s]) の間に増える角度 (単位はラジアン) を表しています。 角速度 ω の値が大きくなると、時間 t が少し変化しただけで、正弦関数の引数 ωt が大きく変化することが分かるでしょう。そこで、ω は、振動の様子がゆっくりと変化するのか、それとも速く変化するのかを表す量であることが分かります。

変位が元の状態に戻るのにかかる時間 (これを**周期**といいます。) について考えてみましょう。角度としては 2π ラジアンだけ変化すると、1 回転して元にもどることに気をつけましょう。すると、周期 T は、ωt が 2π だけ変化するのに必要な時間が周期ですから、$\omega T = 2\pi$ から、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

となります。角速度 ω が大きいと、元の状態にもどるのにかかる時間が短く、角速度 ω が小さいと、周期が長くなる、という訳です。

$$\begin{aligned} \omega: 大 \quad &\to \quad T: 短い \\ \omega: 小 \quad &\to \quad T: 長い \end{aligned}$$

こぼれ話：単振動で現れる三角関数

ここでは、数学が得意で、既に三角関数の微分を知っている人のために、実際に変位 $x(t)$ の微分を計算してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{d^2}{dt^2}A\sin\omega t &= A\frac{d}{dt}(\omega\cos\omega t) = A\omega\frac{d}{dt}\cos\omega t \\ &= A\omega(-\omega\sin\omega t) = -A\omega^2\sin\omega t \end{aligned}$$

となります。確かに、加速度は元の変位 $x(t)$ に比例し、負号がついています。

これを運動方程式 (5.1) に代入します。$x(t) = A\sin\omega t$ ですから、

$$\begin{aligned} -k(A\sin\omega t) &= m(-A\omega^2\sin\omega t) \\ -k &= -m\omega^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

となり、運動方程式を基にして定数 ω を決めることができました。これを用いると、最終的な答えは、次のようになります。

$$x(t) = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

コラム「こぼれ話:単振動で現れる三角関数」の結果は数式で書かれています。数式で書かれたものが出てきたときには、それがどのような意味を持つのか、考える習慣をつけましょう。コラムに書かれている結果

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

あるいは、周期 T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ついて考えてみることとします。ここで使うのは、小学生中学生で勉強したレベルの内容で十分です。

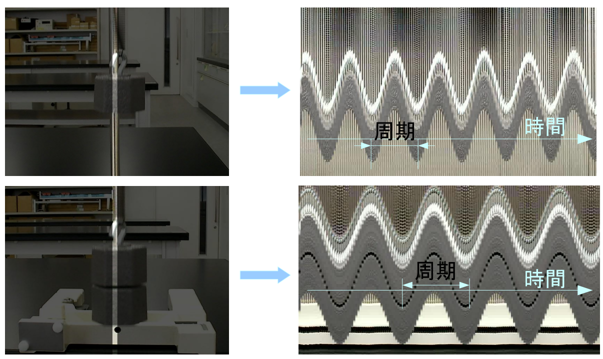


図 5.4: バネの振動の周期: おもりが多いと周期が長い

バネの強さを表す k が、より大きいとどうなるでしょう。ω を決める式の根号の中の分子に k がありますので、k がより大きくなると ω も大きくなります。同様の理由で、周期は短くなります。これは、バネが強いと、振動の様子が速く変化することを表しています。

今度は k は一定で、バネに接続された物体の質量 m がより大きくなった場合を考えましょう。すると、ω を決める式の根号の中の分母に m がありますので、m がより大きくなると ω は小さくなります。同様の理由で、周期は長くなります。「重い」物体が接続されると、変化の様子はゆっくりになるということを意味しています。この性質は国際宇宙ステーションの中での体重の計測に用いられています。バネに宇宙飛行士の体を固定して振動させ、そのときの周期を測定することで体重を推定しています (コラム「こぼれ話：重さ (あるいは重量) と質量」, p.34 参照)。実際に、バネの振動の様子を調べた結果を図 5.4 に示します。この図では、図 3.9 と同様に、画像の一部分を切り出して連続的にならべ、おもりの位置の時間変化が分かるようになっています。おもりが一つの場合と二つの場合とで比べてみると、二つの場合の方が周期が長いことが分かります。

5.2　単振動と等速円運動

等速円運動の復習から始めます。x 軸と y 軸で作られる平面内の等速円運動を考えましょう。等速円運動の運動方程式は、力と加速度の大きさにについて

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

と書けました (3.12 式)。ただし、加速度の表現には式 (3.17) を用いました。**向心力** F は万有引力であったり、電磁気の力であったり、ローレンツ力であったりします。いずれにしても、向心力 F は、大きさが一定で、向きは中心向きでした。

この運動方程式をベクトルとして考え直して成分を考えることにしましょう。回転中心を原点として、半径 r の円周上を等速円運動する物体の位置ベクトルは、次のようになります (図 5.5)。

$$\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \qquad (5.2)$$

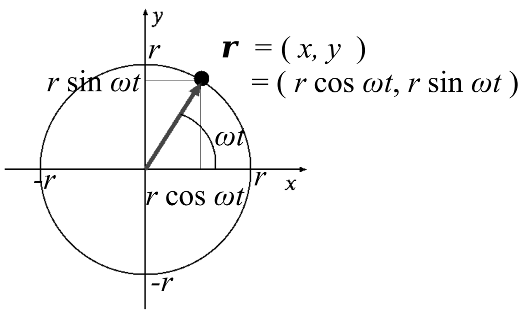


図 5.5: 等速円運動の位置ベクトル

ここで、ωt の部分について補足します。今考えているのは、等速円運動ですから、x 軸から測った角度は時間に**比例**して増大します。そこで、その角度は**比例定数**を ω として、ωt と書き表すことができます。単振動のところで ω を**角速度**といいました。等速円運動の場合は正に角速度と呼ぶにふさわしい量であることが分かると思います。

次に、向心力をベクトル $\boldsymbol{F}$ で書くことを考えましょう (図 5.6)。等速円運動の場合、力は、物体から中心に向かって作用します。そこで、中心向きの力 $\boldsymbol{F}$ は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に平行で、$\boldsymbol{r}$ の定数倍 (ただしこの定数は負の値) で書くことができるはずです。図から、物体が、位置 $\boldsymbol{r}$ にあるときの向心力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ を力の大きさ F を用いて書くと、次のようになるとわかります。

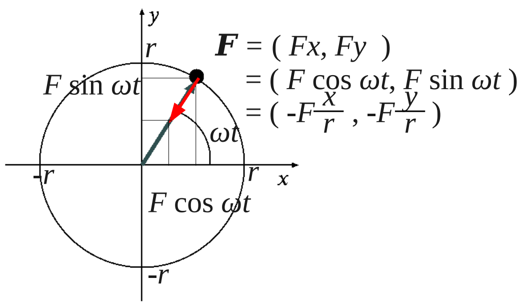


図 5.6: 等速円運動の力

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y) = (-F\cos\omega t, -F\sin\omega t)$$

ここで、$\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ は、式 (5.2) の両辺を r で割ることで、それぞれ、$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}$ と書くことができます。これを用いて三角関数を消去すると、$\boldsymbol{F}$ は次のようになります。

$$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y) = \left(-F\frac{x}{r}, -F\frac{y}{r}\right)$$

こうして力 F をベクトルの成分で表現できました。そこで、改めて運動方程式を x 成分と y 成分それぞれに分けて考えてみます。x 方向の加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ と書けますので、運動方程式は次のようになります。

$$\begin{aligned} -F\frac{x}{r} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ -F\frac{y}{r} &= m\frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

これをよく見ると、等速円運動の x 成分と y 成分は、それぞれ単振動の運動方程式と同じ形であることが分かります。等速円運動の x 成分だけ、あるいは、y 成分だけ取り出すと、それは単振動と同じように見えることを意味しています。実際に、ボールを糸につけて振り回した様子を横から観察して、ボールの位置の時間変化を調べてみると、単振動を見ているのと同じような運動が観察されます。

5.3 単振り子

今度は、一端が固定され、質量が無視でき、伸び縮みもしない糸につり下げられたおもりを考えます (図 5.7)。このようにして振動する物体は**単振り子** (あるいは単振子) と呼ばれています。おもりに作用する力は、**重力**と、糸の**張力**だけです。この二つの合力によっておもりは運動します。

このおもりの運動を考えるために、運動方程式を立ててみましょう。原点をおもりの最下点にとり、また、振り子の運動を 2 次元平面内であるとします。すると、

$$\begin{aligned} -T\frac{x}{\ell} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ T\frac{\ell-y}{\ell} - mg &= m\frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

となります。ここで、図中の角度 θ に対して、$\sin\theta = \frac{x}{\ell}$, $\cos\theta = \frac{\ell-y}{\ell}$ であることを利用しています。この関係は図で確認しておきましょう。ここで T について考えてみましょう。T は外部から与える力では無く、必要に応じて糸が伸び縮みしないように自動的に決まる力です。したがって、現時点では、その大きさは分かりません。ただ、糸の張っている方向に作用していることが分かるだけです。そこで、この T については、十分に注意する必要があります。

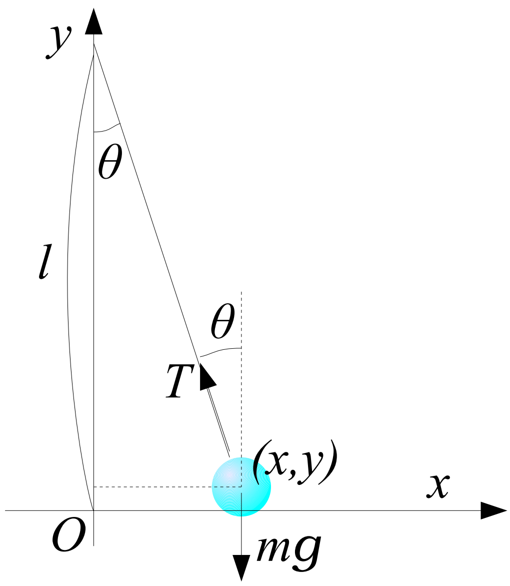


図 5.7: 単振り子

ここでは簡単な場合、すなわち、θ が十分に小さい場合を考えます。すると、おもりの運動はほとんど x 軸上だけになります。そのため、y 方向の運動は無視でき、y 方向の加速度がゼロであると仮定してもよさそうです[1]。すると、y 方向の運動方程式に $y=0$ を代入すると、$T-mg=0$ となり、これを用いて x 方向の運動方程式の T に mg を代入します。

$$-\frac{g}{\ell}x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

この方程式は単振動の運動方程式と同じ ($\frac{k}{m}$ を $\frac{g}{\ell}$ に置き換えただけ) です。そこで、次のようになります。

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad x = A\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$$

バネによる単振動の場合と同様に、式の意味を考えてみましょう。ω は、状態の変化の速さを表すものでした。g が大きくなると、つまり重力が強い場合には、ω が大きくなります。振り子は速く振れ、周期は短くなります。振り子の腕の長さ ℓ が大きくなるとどうでしょうか。そのときは ω は小さく、周期は長くなり、ゆっくり振れることになります。

[1]実際には、ここの議論は省略しすぎています。より正確な議論については、別の講義である「力学」で学ぶ機会があるといいと思います。

こぼれ話：振り子の等時性

この解から得られるもう一つの結論があります。今回行った近似の成り立つ範囲では、周期は振れ幅によらない、ということです。これを振り子の**等時性**といいます。**ガリレオ・ガリレイ**は、教会の天井から下げられた燭台が揺れるのを見て、振り子の等時性に気づき、自分の脈拍で周期を測った、という話が残っています。

5.4 波動

波について、模式図を用いて、その振動の様子を調べてみましょう。まず、波には**縦波**と**横波**があります[2]。この違いは、時々誤解を招くことがあるのでよく理解するようにしてください。

横波

波の進む向きと振動の向きが直交している波 (図 5.8 左)
例: 光、地震の **S 波** (Secondary Wave)

縦波

波の進む向きと振動の向きが平行な波 (図 5.8 右)
例: 音波, 地震の **P 波** ((Primary Wave, これは地中を伝わる音波であると考えることができます。)

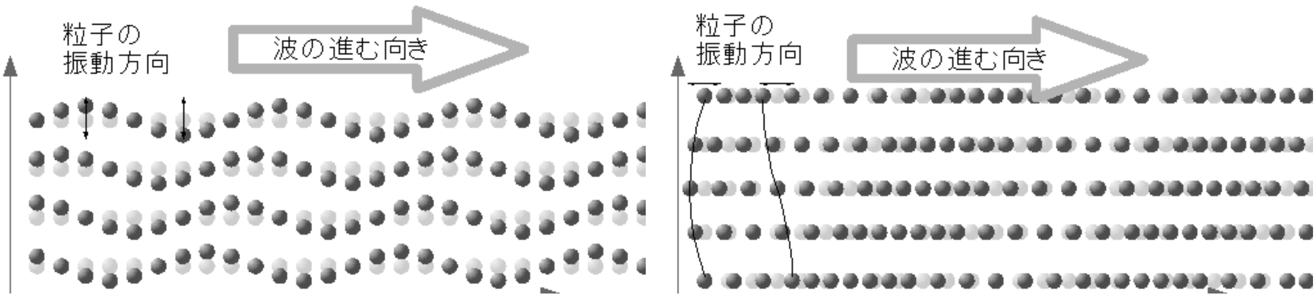


図 5.8: 左:横波の模式図　右:縦波の模式図

図 5.8 の左と右の図は、それぞれ、横波と縦波の波の進む向きと、波を伝える物質 (これを**媒質**といいます。) を構成する粒子の振動の方向を表しています。まず、図 5.8 の左を見てください。四つの異なる時刻の媒質の様子が描かれています。上ほど時間が経った後です。時間が経つほど波の山と谷は右側に移動していくので、右側に進む波であると言えます。媒質を構成する粒子に着目してみましょう。薄い影は波が存在しないときに粒子がある場所を示しています。この場合、粒子一つ一つは、図の上下方向、つまり、波の進む向きと垂直な方向に振動しています。このような波を横波といいます。次に図 5.8 の右を見てください。これも同様に五つの異なる時刻の媒質の様子が描かれています。横波と違って、この場合には媒質の振動の方向は波の進む向きに沿っています。このような波を縦波といいます。

なお、媒質の各点自身が移動していく訳ではなく、各点は、それぞれ少しずつ振動し、その振動が伝わっていることにも気をつけて下さい。

波による変位が、次のように表される**正弦波**を考えます[3]。

$$z = A\sin(kx - \omega t + \phi_0)$$

正弦波では、各点での振動が単振動です。すなわち、x の値を特定の値に固定した場合、各点での変位 z が次のように書けます ($\phi_1 = kx + \phi_0$ は定数)。

$$z = A\sin(-\omega t + \phi_1)$$

[2] よく知られた水の波は、実は、そのどちらでもありません。水の波については流体の動きについての学問である流体力学での学習となるでしょう。
[3] 図の例に示したように、必ずしも各点での運動が単振動ではない波 (正弦波以外) も考えられます。しかし、波の基本的な性質は、正弦波の方が考えやすいです。また、正弦波以外の波も、正弦波の重ね合わせとして考えることができるのです。これについては、数学でフーリエ級数展開やフーリエ変換を勉強したあとで、改めて考える機会があると思います。

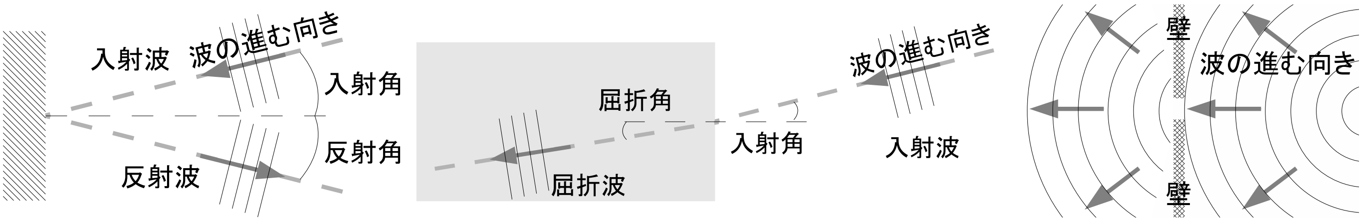


図 5.9: 波の性質の模式図 (左：反射　中：屈折　右：回折)

時間についての**比例定数**は、後々の便利のために負号をつけて $-\omega(\omega$ は**角速度**) として定義しています。三角関数 $\sin\theta$ は、θ の値が 2π だけずれても同じ値になります。そこで、ωt の値が 2π だけずれても変位 z は同じ値になります。時間が**周期** $T=\frac{2\pi}{\omega}$ だけ変化すると、また、元と同じ状態にもどります。

今度は、ある時刻 (つまり、ある瞬間) の波の様子を見てみましょう。変位 z が次のようになっている場合を考えます ($\phi_2=-\omega t+\phi_0$ は定数)。

$$z \quad = \quad A\sin(kx+\phi_2)$$

これも三角関数のグラフの形をしています。x の値が $\frac{2\pi}{k}$ だけ変化すると kx の値は 2π 変化しますから、変位 z は、また元と同じ値になります。この長さ $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ を**波長**といいます。逆に k は、波長を使うと $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ と定義されます。これは**単位長さ** (の 2π 倍の長さ) 当たりに何波長の波が入っているかを表すので、**波数**と呼ばれていまです。

ここで、変位 z が一定になる条件を考えましょう、三角関数 $\sin$ の**引数** 部分 $kx-\omega t+\phi_0$(これを**位相**といいます。) が一定である必要があります。時刻の変化量 Δt に対して、x の値を $\Delta x=\frac{\omega}{k}\Delta t=\frac{T}{\lambda}\Delta t$ だけ変化させると位相は一定になります。そこで、Δt についての係数 $\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}$ は波の速さ (特に**位相速度**) といいます。

5.5　波の性質

この章の冒頭で、波を考えることについて触れました (p.71 参照)。一つ一つの粒子の運動を考えるのではなく、それらの組織的な運動である波を考えることで人間の理解が深まります。具体的には、波の性質として次のようなものがあることが知られています。

1. **反射**

   波は壁などに当たると反射する性質があります。光の場合には鏡を用いることで反射の性質を調べることができます。

2. **屈折**

   波の伝わる速さが場所によって異なる場合があります。例えば光は水の中では空気中より遅くなります。波が、波の速さが異なる場所に到達した場合、波の進行方向が変化します。これを屈折といいます。

3. **回折**

   波が狭い場所を通過すると、そこから波は広がるように伝わります。この性質を回折といいます。

図 5.10: 波の干渉

4. **干渉**

二つの波が重なると、場所によって強めあったり弱めあったりします。この現象を干渉といいます。二つのスピーカーが音を出している様子を図 5.10 に表します。ある瞬間について、赤い線と緑色の線は、それぞれ、空気の密度の高いところと低いところを表しているとします。このような二つの波が重なるとどのようになるでしょうか。赤い線同士、あるいは緑色の線同士が重なるところでは、互いの波が強め合い、密度の高いところは、より密度が高く、密度の低いところでは、より密度が低くなります。そのような点は実線で示した線の上に並んでいます。一方、赤い色の線と緑色の線が重なるところでは、二つの波によって密度の変化が互いに打ち消しあいます。そのような点は破線で示した線の上に並んでいます。

実際に二つのスピーカーから同じ音が出ているとき、聞いている人の場所によって音が大きく聞こえたり、小さく聞こえたりします。それは、図 5.10 の実線のところで聞くのと、破線のところで聞くのとに、それぞれ対応しています。

課題

1. バネによる単振動の場合には、角速度は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と書けます。ただし、k はバネ定数で、バネの強さを表し、m はおもりの質量です。この関係から、強いバネと弱いバネを比べたとき、振動の様子はどのように違うでしょうか。また、おもりの質量が大きいときと小さいときの振動の様子はどのように違うでしょうか。
2. 単振り子の場合には、角速度は $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ と書けます。ただし、g は重力加速度、ℓ は振り子の腕の長さです。この関係から、重力が強い場合と弱い場合とを比べたとき、振動の様子はどのように違うでしょうか。また、振り子の腕の長さが長い場合と短い場合とでは、振動の様子はどのように違うでしょうか。
3. 振り子の周期が、丁度 1 秒になるように、振り子の腕の長さを決めるとします。その長さを求めてみましょう。ただし、重力加速度 $g = 9.8$ [m/s^2] とします。
4. 地震の際に、最初に伝わる波 (P 波) は縦波です。続いて伝わってくる振幅の大きな波 (S 波) は横波です。ある地点で、その地点から見て西の浅いところで発生した地震を観測するとき、最初はどのような揺れが感じられ、続いてどのような揺れが感じられるでしょうか。
5. 次のような現象は波のどのような性質と関係があると考えられるでしょうか。調べてみましょう。
   (a) 夜空の星がまたたく現象
   (b) 夜になると遠くの電車の音が聞こえる現象
   (c) 地面が水たまりが無くても、暑い日には地面光に水があるように見える現象 (逃げ水)
   (d) スピーカーの前に物を置いてもスピーカーの音は聞こえつづける現象
   (e) レーザー光を細長いすき間に通すと、すき間の向きに垂直な方向にレーザー光が広がる現象
   (f) 二つのスピーカーから一定の振動数の音を出しつづけると、場所によって音の大きさが変化する現象
   (g) シャボン玉の表面に虹の七色が見える現象
   (h) 太陽が二つあるいは 3 つあるように見える現象 (幻日)

第6章　原理

6.1　原理とは

これまで、「〜の**法則**」というものがいくつも現れてきました。そうしたものが、どうして成り立つのか、それを知りたいのは人間の性 (さが) であると言えます。どうして運動量保存則が成り立つのか、また、ニュートンの運動の法則が成り立つのはどうしてか。

「法則」と似たような言葉に「**原理**」というものがあります。まず、この二つの言葉の違いについて書きましょう。一般的には、この二つの言葉は区別されています。「原理」は、それを説明しようとしても説明できないもの、証明することはできないもの、あるいは、様々な現象が起こっていることを考えるとそれを受け入れるしかない、というものです。それに対して、「法則」はやや性質が異なります。「法則」は、基本的には、何らかの原理に基づいて説明や証明ができるものです。

例えば、**ケプラーの法則の第三法則**は、ニュートンの**運動の法則**の第二法則 (**運動方程式**) と**万有引力の法則**から導くことができました。このような意味で、ケプラーの法則の第三法則は、「原理」と呼ぶことはできません。逆に、ニュートンの運動の法則と万有引力の法則は、どうしてそれが成り立つのか、これまでの学習では根拠を示すことができなかったので、ここまでの範囲では原理であると考えるべきです。

ここで注意が必要です。「法則」と名前がついていても、本書では「原理」として扱っているものがあることが分かると思います。例えば、ニュートンの運動の法則は、本書では「原理」として扱っています。逆に、「原理」と名前がついていても、「原理」と見なすのは難しいものもあります。有名な例は「**アルキメデスの原理**[1]」や「**てこの原理**[2]」などで、今では原理とみなすのは不適当です。このようにしてみると、名称として「法則」と「原理」の区別は厳密に行われている訳ではありません。

ここでは、いくつかの原理を扱ってみたいと思います。

6.2　重ね合わせの原理

地球と月との間に宇宙船があるとします。宇宙船は、地球-宇宙船間に作用する万有引力と、月-宇宙船間に作用する万有引力と、両方の力を受けます。そして、その力は、

> 地球と宇宙船だけが存在するとしたときに、地球と宇宙船の間で作用する万有引力

と

> 月と宇宙船だけが存在するとしたときに、月と宇宙船の間で作用する万有引力

とを、(ベクトル的に) 足したものです。

ここで、それが当たり前だと思った人は、どれくらいいるでしょうか。当たり前だと思った人は、なぜ、足し算でよいのか、説明してみてください。おそらくできないと思います。例えば、

> 地球と宇宙船の間に作用する万有引力が月の影響を受けて、月が無い場合に比べて大きくなる

というようなことが起こる可能性も考えられます。ところが、実際にはこのようなことは起こらず、単純な足し算で表されるようだ、ということです。これは、原理として受け入れるべき内容です。つまり、これは説明しようとしてもで

[1] 浮力についての性質を述べたものです。重力の性質と流体力学の運動方程式から導くことができます。
[2] これもアルキメデスによって発見されたものです。大きさを持った変形しない物体についての運動方程式を用いて説明できます。

きないような種類のものと考えるべきです。このように、複数の力が、単にそれらの (ベクトル的な) 足し算で表現できることは「**重ね合わせの原理**」と呼ばれています。

重ね合わせの原理は、波動についても適用されます。ある場所に二つの波が到達したとき、波による変位は二つの波それぞれに伴う変位の足し算になります。これが波についての重ね合わせの原理です。水面にできる波には重ね合わせの原理は成り立ちません。しかし、**電磁気学**で扱う電磁波や、微小な世界を扱う学問である**量子力学**に出てくる波動は重ね合わせの原理が成り立つような波動です。

6.3　運動量保存則と角運動量保存則と電磁気学

運動量保存則は原理でしょうか。本書では、 3.12 節でニュートンの力学の法則の第三法則である**作用反作用の法則**から導きました。そのような意味では、作用反作用の法則の方が「原理」としてふさわしいことになります。

しかし、本書の範囲で考えられる現象について作用反作用の法則は全て成り立っているでしょうか。次の図を見てください (図 6.1)。そして各々の電荷の周りにどのような磁場が形成され、どのような力が作用するか考えてみましょう。すると、二つの電荷の受ける力は「向きが逆」ではないことが分かります。これら二つの粒子が互いに力を及ぼしあっていると考えると、作用反作用の法則に反しています。これはどのように考えたらいいのでしょうか。

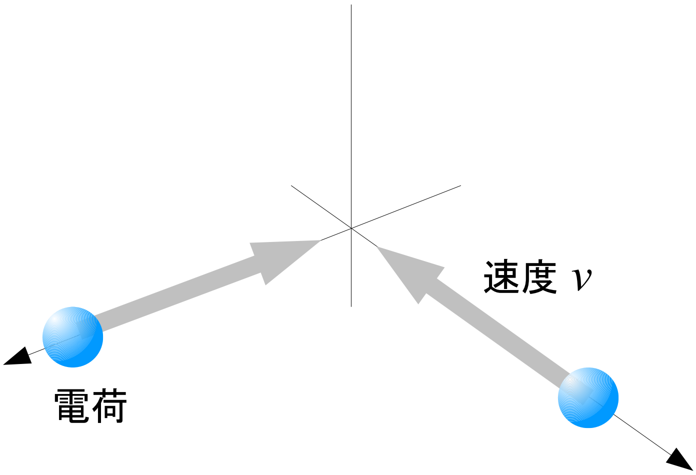


図 6.1: 直交する方向から接近する電荷

もう一つ考えるべき例があります。角運動量保存則 (3.15 章 p.47) を思い出して下さい。作用反作用の法則が成り立つような二つの力の組に対して、角運動量が保存するような場合と、保存しないような場合があることを指摘しました。これを電磁気学で学んだ**ビオ・サバールの法則**による力と**ローレンツ力**による力について考えてみましょう。これらは作用反作用の法則は満足します。大きさが同じで向きが逆です。しかし、作用する向きは、電荷と磁荷を結ぶ線上にはありません (図 6.2)。そこで、これらの力は角運動量が保存しないような力の組合せになっています。

それでは、角運動量は保存しないのでしょうか。もしも保存しないのであれば、角運動量保存則には一般性はないことになり、あまり考える意味の無い物理量になってしまいます。

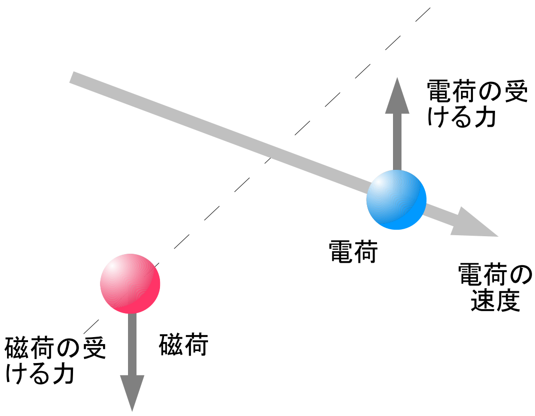


図 6.2: 磁荷と電荷との間で作用する力 (電荷が走る場合)

この問題に対する答えは本書の範囲を越えるので、簡単に説明します。まず、図 6.1 の場合について説明しましょう。実は、この場合は作用反作用の法則は成り立たないものの、運動量保存則は成り立っています。二つの電子が力を受けるのは、実際には電子の周りに作られる磁場からです。この**磁場**が時間変化するときに**電磁波** (電波) が発生します。電磁波は運動量を持っていると考えられています。その電磁波の運動量も合わせると、全体で運動量が保存するようになります。したがって、電場や磁場の時間変化による運動量を考えると、運動量保存則が成り立つことになります。作用反作用の法則よりも角運動量保存則の方が原理としてふさわしいと言えます。図 6.2 の場合も実は、場の角運動量まで考える必要があるのです。

こうしたことを考えると、本書での電磁気学の扱い方が問題であったことに気づきます。本書では、電場や磁場は、単に人間が考えた仮想的なものであるとしても問題ないように話を進めてきました。しかし、電場や磁場は物体と同様に運動量や角運動量を持つので、実在するものであること考えるべきです (コラム「学びの Tips： 近接作用と遠隔作用」, p.61 参照)。そして電場や磁場を対象とした新たな理論を構築すべきであることになります。そのような新しい理論は**マクスウエル**によって構築されました。マクスウエルによる電場と磁場についての四つの法則は、新たな原理として受け入れるべきものです。

このように、物理学の進展によって、これまで原理だと思われていたことよりも、より原理としてふさわしいものが見つかることがあります。

6.4 エネルギーに関する原理

保存量である**エネルギー**の合計は時間的に変化しません。これを**エネルギー保存則**といいました。これに対応して、純粋にエネルギーを生み出すような**永久機関**は存在しないと考えられます。これらは、力学的エネルギーについては運動方程式を基にして導くことができます。しかし、運動量保存の法則が作用反作用の法則よりも原理として適切であったように、エネルギー保存則の方が原理として適切であると考えることもできます。

エネルギーについてはもう一つ、**エントロピー増大の法則**と呼ばれる原理があります。エネルギーが保存される一方で、**エントロピー**と呼ばれる乱雑さは増大するという原理です。同じエネルギーであっても、物体の運動エネルギーよりも、個々の分子運動に関連した熱エネルギーの方が乱雑さ (エントロピー) は大きいので、物体の運動エネルギーは熱エネルギーになりやすく (エントロピーは増大しやすく)、逆に、熱エネルギーが自然と物体の組織だった運動エネルギーになることはない、という原理です。こうした原理は、**熱力学**と呼ばれる分野の重要な原理として扱われています。

6.5 相対性原理

ここで、思考実験してみましょう。私が、一定の速度で進む電車の中で消しゴムを静かに手放して落としたとします。その消しゴムはどのように落ちるでしょうか。電磁気学のところで指摘したように、電車の中の人にとって真っすぐ下に向かって落下します。私が観察する電車の中の世界でも、電車の外で静止している世界でも、全く同じ物理法則が成り立っているということです。これも、当たり前のようではありますが、説明が困難で、原理として受け入れるべきものです。このように、等速直線運動しながら観察しても、同じ物理法則が成り立つことを、**ガリレイの相対性原理**といいます。

また、ある物理学的な現象を、相対的に等速直線運動している別の座標系で書き直すことを「**ガリレイ変換**」といいます。

6.6 新たな原理

さて、この本も、もうすぐ終わりです。ここで、一つ問題を出してみます。

> 電磁気学のところで学んだように、並行して進む電荷 (ここでは、同じ電荷で符号も同じとする) は、電荷同士のクーロン力の他に、磁気を介して互いに引き合うことになる (4.3 節)。
>
> ところが、これにガリレイの相対性原理を適用して、電荷と共に移動しながら観察すると、電荷は止まったままであるので磁場はできない。そこで、クーロン力だけが作用して、磁気を介した引力は作用しない。
>
> その結果、どのような立場で観察するかによって、二つの電荷間に作用する力の大きさが変わることになる。これをどう説明するか。

このように、原理や法則に従って説明した結果、矛盾した結論が得られるような問題を**パラドクス**といいます。この問題は典型的なパラドクスです。皆さんはどのように答えますか。

このパラドクスは難しく、本書の範囲を越えます。解決するためには、**相対性原理**を見直す必要があります。アインシュタインは、もう一つ原理である**光速度不変の原理**と組み合わせて、相対性原理を見直し、**ガリレイ変換**に対して不

変なのではなく、**ローレンツ変換**に対して不変であるような相対性原理を導入しました。こうした二つの原理を基にして組み上げられた理論がアインシュタインの**相対性理論** (**特殊相対性理論**) です。ローレンツ変換や相対性理論については別の機会に勉強してみて下さい。

また、**ハイゼンベルク**の**不確定性原理**と呼ばれるものがあります。非常に小さな粒子の場合には、位置と速度を同時には決められず、不確定性があるという原理です。量子力学と呼ばれる分野に重要な原理です。

20 世紀になり、物理学には量子力学や相対性理論が登場しました。そして、新しい物理学的世界観が切り拓かれました。そして、その背景には、新たな原理があったのです。興味を持った人は、更に物理学を勉強してみてください。

考えてみよう：不確定性原理とラプラスの悪魔

ラプラスの悪魔の考え方 (p.31) では、粒子の初期の位置と速度が分かっているという前提で話を進めました。ところが、不確定性原理によって、これらを同時に精度よく決めることができない、ということになりました。この二つのことからどのようなことがいえるでしょうか。考えてみましょう。

課題

1. 物理学にはいろいろな有名なパラドクスがあります。どのようなパラドクスがあるのか調べてみましょう。また、そのパラドクスについて考えてみよう。
2. 図 6.1(p.80) に示された電荷には、それぞれどのような向きの力が作用するでしょうか。図示してみましょう。

第 7 章　物理学と人間生活

7.1　電流と消費電力

近年、ハイブリット自動車や電気自動車が普及しつつあります。電気自動車については、充電しなければ走れません。短時間で充電することが難しいことが課題の 1 つです。ゆっくりでいいのであれば、一般家庭の電源は電気自動車の充電に使えます。日産リーフについてホームページ[1]を見てみると、8 時間の充電で、228km 走行できるようです (一般道での走行時間は 5 時間程度と考えていいでしょうか)。こうしたことから分かるように、家庭で利用している電気エネルギーは、電気自動車を動かすことができるほど、実は大きなエネルギーです。

このように強力なエネルギーを使う場合には注意が必要です。

- 感電

  日本の家庭用電源電圧は 100[V] です。人間の体は抵抗が大きいので、100[V] の電源ではほとんど電流は流れません。しかし、濡れた手で触った場合等は感電します。感電すると筋肉が硬直し、電源から手を離せなくなる場合があり、場合によっては死に至りますから、注意が必要です。

  また、電気製品 (カメラのストロボ、空気清浄機、レーザープリンターなど) は種類によって、内部で高い電圧を発生させます。電源を入れたままの解体などは、感電の恐れがあります。

  屋外の電柱にはトランスと呼ばれる変圧装置が設置されています。トランスは、電柱まで運ばれてきた電気の電圧 (だいたい 6600[V]) を、家庭用の (100[V] や 200[V]) へ変換する装置です。電気は、高い電圧で送電した方が途中のエネルギーのロスが少なくなる性質があります。そこで電柱のトランスまでは 6600[V] もの高電圧で送電している訳です。電圧が 6600[V] もあると、感電で即死する場合もあるそうです。また、鉄塔に架けられている高圧送電線の場合は、数 10 万 [V] もの高電圧です。電柱の電線などにも接触しないように注意が必要です。

- 電気製品の発熱による危険性

  感電の項目で触れたように、家庭用の電源は 100[V](や 200[V]) です。ところが、この電圧の値は、国や地域によって値が異なります。そこで、日本から海外に電気製品を持っていったとき、あるいは逆に、海外から日本に電気製品を持っていったとき、その電気製品が異なる電圧に対応しているか、気をつける必要があります。

  海外との電圧に気をつけなければならないのは、その電気製品が壊れてしまうからだけではありません。家庭に供給されている電気の電気エネルギーが意外に大きいことも合わせて考えると、火災の原因になる可能性もあります。日本に住む外国人の家で火災が発生したというニュースを聞く度に、もしかしたら海外から持ち込まれた電気製品が原因ではないかと心配しています。

  もちろん、日本国内の製品を使っている場合でも、使い方によっては危険になることがあるので、気をつける必要があります。典型的には、電源ケーブルが切れかかって漏電したり、ショートしたりする場合、あるいは、タコ足配線のような場合です。

- 消費電力の考え方

  ここで、基本的な考え方について紹介しておきましょう。まず、電気製品を使うと、消費電力のほとんどは最終的に熱になります。そこで、消費電力は発熱と関係があると考えてください。

  次に、消費電力の値についてです。**電力**については学びました (4.5 節)。消費電力は**単位時間** (1[s]) 当たり、電流によって発生するエネルギーです。SI の単位は [W](**ワット**) です。他のエネルギーとも比較しやすいように、1 つ基準となるような値を示しておきましょう。真上にある太陽が単位時間 (1[s])、単位面積 (1[m^2]) あたりにもたらすエネルギーの量 (太陽定数, 大気による吸収・散乱を除いて) は、約 1370[W] です。

[1]URL: http://ev.nissan.co.jp/LEAF/, 2015 年 1 月 18 日閲覧

消費電力は電圧 (単位 [V](**ボルト**)) と電流 (単位 [A](**アンペア**)) の積で計算できることを思い出しましょう。

$$\text{消費電力 (単位 [W])} \quad = \quad \text{電圧 (単位 [V])} \times \text{電流 (単位 [A])}$$

例えば、日本の家庭用電源 (100[V]) で、1000[W] のドライヤーを考えます。このとき、電流はどれだけ流れているでしょうか。答えは 10[A] です。なぜなら、次のような計算が成り立つからです[2]。

$$1000[\mathrm{W}] \quad = \quad 100[\mathrm{V}] \times 10[\mathrm{A}]$$

消費電力 1000[W] は、単位面積 (1[m^2]) 当たりに降り注ぐ太陽エネルギーと同程度以下の値です。しかし、1[m^2] 当たりの太陽エネルギー程度で大騒ぎする必要があるのでしょうか。気をつけておきたいのは、電気の性質として、抵抗の大きいところで発熱が大きくなるということです。例えば電線がよじれて断線しかけているとき、その部分の抵抗が大きくなります。そこで、その部分が局所的に発熱する可能性があります。小さな虫めがねでも太陽光を 1 点に集中させると、簡単に紙を燃やせます。これらのことを考え合わせると、配線の不注意は火災の原因になりかねないことが分かります。

- 定格

  ここまで説明してきたように、家庭用の電気でも大きなエネルギーが供給されています。安全のために、多くの場合、利用できる電気の上限 (**定格**) が設定されています。例えば、日本家屋の壁に設置される標準的なコンセント部品の仕様書を見ると、「定格 15A 125V」と書いてあります。電圧については、日本の電源電圧は、家庭内では、100[V] が標準ですので、それに余裕を持たせて 125[V] になっている訳です。電流の方はどうでしょうか。定格が 15[A] ということは、100[V] × 15[A] = 1500[W] ですから、1500[W] まで接続できることを意味しています。1 つ 1000[W] のドライヤーを二つ同時に使うことは定格を越えています。タコ足配線と呼ばれるような、1 つのコンセントから多数の電気製品を使うような接続方法は、定格電流を越えないように注意が必要です。電源の延長ケーブルにも定格があります。15[A] までならば、コンセントと同じなので、同様に注意すればいいでしょう。

  このように危険と隣り合わせの電気エネルギーには、もちろん、安全装置が設置されています。配電盤にある配線用遮断器 (ブレーカと呼ばれるもの) は一種の安全装置です。ブレーカを流れる電流が一定の値 (ほとんどの場合は 20[A]) を越えると、ブレーカが作動して電流が止まるようになっています。1 つのブレーカからは、枝分かれしていくつかのコンセントに接続されているので、1 つ 1 つのコンセントの上限値が 15[A] であっても、1 つのブレーカからは合計で 20[A](2000[W]) を越えられないようになっているということです。

7.2 放射線

2011 年 3 月 11 日に発生した東北地方太平洋沖地震による震災 (東日本大震災) では、福島第一原子力発電所も被災しました。全電源が停止して原子炉の冷却ができなくなり、放射性物質が周辺地域に拡散し、現在でも漏れつづけています。放出された放射性物質の影響は私たちが死ぬまでに取り除くことはできません。私たちは、嫌でも、放射性物質とつき合い続けなければなりません。そこで、**放射線**に関する知識は私たちに必要なものです。

また、別の観点からも放射線や原子力についての知識は必要です。この事故によって明かになったことの 1 つは、震災前に、電力の 1/4 から 1/3 を原子力発電に頼っていた私たちが、その原子力発電について、あるいは放射線について、理解が十分でなかったということです。どのような危険性があるのか、知らないまま国の原子力政策を支持し、その電力の恩恵を受けていたことは、「民主国家」の主権者として残念なことです。ところが現在では、原子力発電所の再稼働について積極的に支持する声も高まり、今後、原子力発電所は本格的に再稼働するかもしれません。「民主国家」であるならば、国の政策を決めるのは私たちであるべきです。その私たちが、原子力について知らないまま政策を決定したら、それは非常に危険なことです。そこで、今からでも、私たちが原子力のことについてある程度の知識を持つことは必要ではないでしょうか。

原発事故以降、原子力について、以前よりも情報の入手が簡単になっています。その一方で、ややいい加減な情報も目立ちます。ここに書く文章は、放射線についての素人が (一応、丁寧に情報を調べながら) 書いている文書であることを、まず、宣言します。いい加減な情報源を増やしていることにならないことを願いながら、できるだけ正確に、しか

[2]家庭用の電源は直流ではなく交流です。そこで、ここでの議論とはやや事情が違います。交流については、より深く電磁気学を学ぶときに改めて勉強して下さい。

し、これを読んでいる皆さんにも分かりやすく書きたいと思っています。ここに書いた知識を基に、より多くの知識、正確な知識を学んでもらえたらと思います。

以下では、いくつかの項目に絞って簡単に説明したいと思います。

放射線とは

放射線は目に見えません。放射線に当たっても何も感触がありません。もちろん聞こえもしません。私たちが感知できないものであることを、まず覚えておきましょう。

放射線にはいくつかの種類があります。そのうち、原子力発電所の事故に伴って問題となっている放射線は、主に次の 4 つです。

- **α線** (アルファ線)

  高速で飛んでいるα粒子 (ヘリウムの原子核と同じく**陽子** 2 個、**中性子** 2 個で構成された粒子) です。α粒子は正の電荷を帯びています。

- **β線** (ベータ線)

  高速で飛んでいるβ粒子 (**電子**) です。電子は負の電荷を帯びています。

- **γ線** (ガンマ線)

  波長の短い電磁波 (電波) です。ちなみに、電磁波とは、電場と磁場が時間変化しながら伝搬していく波のことです。

  α線からγ線までを考えると、物質に対する影響の大きさは、α線β線γ線の順番に小さくなっていきます。逆に、透過率はα線β線γ線の順番に大きくなっていきます。

- **中性子線**

  高速で飛んでいる中性子です。中性子は原子核を構成する粒子の 1 つです。

  中性子線は電気的に中立なので、電気的な影響を受けないため、透過率が高いです。にもかかわらず、影響が大きいので厄介な放射線です。

α粒子・β粒子・中性子は特別な存在ではなく、身の回りにも存在する粒子です。また、光も電磁波ですから、電磁波もたくさんあります。**原子核**の状態の変化 (放射性崩壊・核反応) に伴って放出された場合に限って放射線と呼ばれます。放射線は強いエネルギーを持っているので区別されるのです。

放射線の影響

このような放射線は、目に見えないほど小さい鉄砲の弾丸が発射されたようなものです。ただし、その弾丸が当たって体に穴が開く訳ではありません。その弾丸が壊すのは人の体を作っている分子です。

霧箱と呼ばれる装置は、放射線の通り道を見えるようにした装置です。箱の中にアルコールを入れ、アルコールの蒸気を冷却して過冷却状態 (すぐにも凝結して雲粒を作るような状態) にしておきます。放射線の通り道にある気体の分子が、放射線の影響で雲粒を作るために通り道が見えるようになるのです。

放射線は物質の近くを通過すると、物質を構成する分子・原子に影響を与えます。物質を構成する分子や原子は、原子核・電子の間の電磁気力で結びついています。ところが、α線とβ線は粒子が電荷を帯びているために、また、γ線は電場の変動がもたらされるために、分子を結合している力に影響を与えます。その結果、分子の結合が解けて破壊されたり、分子・原子が電子を失ってイオン化したりします。中性子線は、水素原子の原子核 (陽子) と衝突すると、陽子を弾き飛ばしてしまいます (そのメカニズムは「力学」で勉強するでしょう)。その結果、電子だけを置き去りにして水素原子が無くなってしまうのですから、その分子は破壊されます。霧箱で放射線の通り道が見えるのは、このような変動がきっかけとなって雲粒ができるようになるからです。

人体が放射線を受けるとどうなるでしょうか。同様に電離作用で体を構成する分子が電離したり、あるいは破壊されたりします。特に DNA(デオキシリボ核酸) などの遺伝情報を持った物質が破壊されたり影響を受けたりすると、細胞が死んでしまったり、ガンの原因になります。

放射線の影響の程度

放射線が物質に電離などの効果をもたらすということは、物質にエネルギーが与えられた、ということです。放射線に曝 (さら) されている物質に与えられるエネルギーの量は、物質の量が多ければ多いほど多くなるはずです。そこで、単位質量 (1[kg]) 当たりに与えられたエネルギーの量を考えます。単位質量当たりに与えられたエネル

ギーの量を放射線の**吸収線量**と呼んでいます。文字通り読むと、放射線を物質が取り込んだように思われます。しかし、そうではなくて、物質が受けたエネルギーに関係する量であるので注意が必要です。また、電離のされ方、あるいは、放射線のエネルギーの受け取り方は物質によって異なりますので、この点も注意しておきたい点です。

放射線の吸収線量の定義に基づいて考えると、その単位は SI の組み立て単位として、[J/kg] で表されることが分かります。この単位は [Gy](**グレイ**) と書き表されています。

人体への影響を考えてみましょう。同じエネルギーであっても、α 線の影響の方が β 線や γ 線の影響よりも大きいことが知られています。また、同じエネルギーを受けても、体の臓器 (部位) によって影響の受けやすさも違います。例えばガンになりやすい臓器は影響を受けやすいと考えます。放射線の吸収線量を、こうした観点から補正し、人間が受ける影響の度合い (被曝の度合い) としたものが**実効線量**です。実効線量の単位は、基本的には Gy と同じ [J/kg] ですが、Gy と区別し、Sv(**シーベルト**) を用います。一度に 7[Sv] の実効線量を浴びると、人は死ぬと考えられています。医療で用いられる X 線 CT スキャンでは、10[mSv] = 0.01[Sv] 程度被曝します。

実効線量が人体への影響の尺度として用いられるのに対して、外部からの放射線が人体に与える影響を実測する際には、人体模型を設置して、人体模型内部の放射線の影響量を測定するのは非現実的です。そこで、実効線量とは別に、周辺線量当量として定義されたものを測定します。**周辺線量当量**にも種類があり、1cm 線量当量と呼ばれるものが人体全体への影響を考えた量として用いられます。人体への影響という意味では実効線量と似た考え方なので、単位はどちらも [Sv] です。特に、1 時間当たりの周辺線量当量を**周辺線量当量率**といい、単位には [Sv/h] などを用います。

もっと簡単には、人体でもなく、人体の半分以上を構成している水でもなく、空気に対してどれだけエネルギーを吸収するかを考えます。これは、**空間放射線量**と呼ばれます。単位は [Gy] です。空間放射線量から、放射線の種類など、いくつかの仮定を用いて線量当量を求めることが行われているようです。

ここの説明で現れた量は、名称も長いものが多く覚えにくいです。また、厳密な定義が複雑なものもあります。しかし、それは人体への影響の尺度として正確に表現できるようにするための工夫なので、場合によってはしょうがないと諦めるべきです。と、同時に、厳密な記述の場合には、こうした名称 (実効線量とか周辺線量当量とか空間放射線量とか放射能とか) が正確に用いられているはずなので、きちんと記述があるかどうか、を気にするべきです。また、別の名称が用いられている場合には、それらがどのような意味か、確認しながら理解する必要があります。同じ放射線でも (全身で考える場合と局所的に考える場合とで)、値が 100 倍違ったりすることもあるからです。

放射能とは

放射線はミクロのレベルの鉄砲の弾丸にたとえることができました。同じアナロジーで考えると、放射能は、**単位時間** (1[s]) で何発の弾丸が発射されるか、と考えればいいでしょう。

放射線は原子核の状態の変化 (放射性崩壊・核反応) に伴って放出されるものであることを学びました。原子の状態の変化が単位時間 (1[s]) に何回起こったかを表す量が放射能です。1 秒間の回数ですから、**振動数**の単位 [Hz](**ヘルツ**) が使えそうです。しかし、放射能の場合には [Bq](**ベクレル**) を使うことになっています。

いくつかの注意点があります。1 つは、放射能は、放射能がある物質の量に比例するということです。2 万 [Bq] の汚染された水 2[L] を半分に分け、 1[L] で考えると、その放射能は 1 万 [Bq] になります。

もう 1 つの点は、放射能は放射線の種類や強さとは無関係であるということです。α 線を放出する場合と β 線を放出する場合では、影響の度合いが異なります。また、また、同じ α 線が放出される場合であっても、α 粒子放出時の速さは、放射線を出す原子核の種類によって変化します。放射能を数値化した場合にはこの点は考慮されていません。

半減期

放射能は時間とともに減っていきます。しかし、減り方は放射性同位体 (放射性物質) の種類によって異なります。

特定の放射性物質に着目してみると、放射性物質の減り方は、一定時間ごとに半分になるようになっています。その時間のことを**半減期**といいます。

例えば、半減期が 30 年の放射性同位体の原子が 40 個あったとします。この数は、30 年経過すると半分の 20 個になります。もう 30 年経過すると、つまり、最初から 60 年経過すると 10 個になり、更に 30 年経過 (最初から 90 年) 経過すると 5 個になります。このように数が減少していきます。

主な放射性同位体

福島第一原子力発電所の事故では、次のような放射性物質が注目を集めています。

セシウム 137(^{137}Cs)

β線・γ線を出しながら放射性崩壊をします。半減期は約 30 年です。カリウム (K) と同様の化学的性質を持っているために、体にも取り込まれやすいです。同時に、体から排出される割合も高いので、体の中に蓄積されたセシウム原子は、70 日程度で半分に減ると考えられています。生物の活動による減少については、生物学的半減期といいます。

ヨウ素 131(^{131}I)

β線・γ線を出しながら放射性崩壊をします。半減期は約 8 日です。甲状腺に蓄えられやすく、特に子供の場合に甲状腺ガンの原因になると考えられています。

ストロンチウム 90(^{90}Sr)

放射性崩壊で放出するのはβ線がほとんどです。半減期は約 29 年です。化学的な性質はカルシウム (Ca) と似ているために、体内に入ると骨に取り込まれ、長期間体内から放射線を出しつづける可能性があります。

プルトニウム (Pu)

いくつかの放射性同位元素があります。^{239}Pu の場合、α線を出して放射性崩壊をします。半減期は約 2 万 4 千年です。

α線を出すために、体内 (特に肺) に取り込まれた場合に人体に対する影響が大きくなります。吸い込んで肺に入った場合には、0.26[mg] = 0.00026[g] が致死量であると言われています。30[kg] ほどで日本人全員分の致死量になります。

こぼれ話：技術と科学

実用的な電池は**ボルタ**によって 1799 年に開発されました。一つの技術革新です。その後、それまで主流だった静電気についての研究に対して、電流の性質、特に電流と磁場との関係が詳しく調べられるようになります。発明から、おおよそ 30 年の間に電流についての主な性質が次々と発見されています。

このように、ある技術が開発されたことによって、ある分野の科学的な研究が一気に進む時期があります。現代でも、遺伝子の複製技術が開発されたことによって生命科学が進展した例があります。

逆に、科学が進展すると新しい技術が生み出されます。原子核についての研究が進み、相対性理論が打ち立てられると、原子力の利用が考えられ、新しい技術として実現しました。

このように、科学と技術は、まるで車の両輪です。二つが組み合わされると、自動的にどんどん前進してしまうようになります。そして暴走するかもしれません。暴走を食い止めることができるのは、あるいは、前進する方向をコントロールすることができるのは誰でしょうか。

科学と技術に携わる人々は「できることをする」という態度で臨みます。それがむしろ、科学者や技術者の役割だからです。それは、私たちが考えるコントロールとは、むしろ反対の立場です。

このようなことを考えると、科学者や技術者に任せるのではなく、私たち自身が知識を持つことがとても大事だと考えられます。

課題

1. 原子力発電所の発電能力が、1[GW](ギガワット) であったとします。また、日本の一般家庭で、50[A] の電流を利用していたとします。原子力発電所は、何戸分の電気をまかなうことができるでしょうか。
2. チェルノブイリ原発事故と福島第一原発事故で、環境に放出された放射能 (放射性の降下物、あるいは、大気中への放出量) は、それぞれ何 [Bq] でしょうか。調べてみましょう。
3. 日本国内のプルトニウム保有量はどれくらいでしょうか。
4. 放射線業務従事者 (原発などで作業を行う人) の実効線量は 1 年間で 50[mSv](50[mSv/年]) です。1 年間で 2000 時間作業すると考え、1 時間当たりに換算すると、何 [μSv/h] になるでしょうか。
5. 2012 年 3 月 27 日の各社報道によると、福島第一原発 2 号機の格納容器内での実効線量は、最大で 72.9[Sv/h] とのことです。致死量には何分で達するでしょうか。

おわりに

ここまで物理学の基本的な部分について大まかな説明をしてきました。皆さんはどのような感想を持ったでしょうか。書いている側の意図として、次のような点が伝わればいいと願っています。

- 人類に未来を予知する能力を与えた学問であること
- 力学と電磁気学につながりがあること
- 電磁気学の様々な法則も、少数の電磁気に関する性質で説明できること
- 微小なレベルの現象から、多数の粒子のまとまった運動を考えることができること
- 高校で学ぶような物理学の範囲にも、自己矛盾するような内容が含まれており、より新しい物理学へのつながりが隠されていること
- ベクトル・指数法則・微分積分が物理学の中で使われていること

もしもこうしたことが伝わっているとすれば、みなさんが、これまでどこかで学んできた物理学の断片や数学がつながったような気がするでしょう。また、これから学んでいくときに、どのような勉強が待っているのか、想像できるのではないでしょうか。そうであってほしいと願っています。

本書で勉強し終わった皆さんにお願いがあります。それは、改めて「物理学をなぜ学ぶのか」を考えることです。福島第一原子力発電所の事故が示した重要な点の一つは、主権者である国民に、原子力に対する十分な理解がなかったことであると私は考えています。科学技術の恩恵を受けながら、その科学技術についての理解が十分でなければ、道を誤るのは当然のことです。

原子力だけではありません。技術はどんどん進歩しています。いつの間にか、私たちの身の周りには、プライバシーを侵害したり、人を傷つけたりする技術があふれています。そうした技術にどう向き合うかは、これからの時代に厳しく問われなければなりません。

もしも私たちが「物理学が面白いから」という理由だけで学び、「物理学が面白くないから」という理由だけで学ばないのであるならば、再び大きく道を踏み外すことになるのは、私には自明のことに思えます。皆さん自身が、世界中の人々が、物理学を含む科学技術とどう向き合うべきなのか、これを機にじっくり考えて欲しいと思います。

最後に、このテキストができるまでに、様々な形で協力してくれた学生の皆さんに感謝したいと思います。また、地球流体電脳倶楽部ライブラリ `https://www.gfd-dennou.org/` によるマクロを利用させてもらいました。記して感謝したいと思います。

付 録 A　章末課題の略解とコメント

ここに書いたものと比べるだけだと「当たった」「外れた」となりがちです。まずはしっかり自分で答案を書く練習をしてみましょう。

1 章

1. 省略

2 章

1. 1 エーカーは 220 ヤード× 22 ヤードで定義されます。また、1 ヤードは 0.9144 m です。正方形ではなく、長方形で定義されるのは、農耕と関係があるのではないでしょうか。
2. (a) 1000 (b) $\frac{1}{100} = 0.01$ (c) $\sqrt{4}$=2
3. (a) 10^5 (b) 10^{12} (c) 10^{-2} (d) 10^3 (e) 10^2 (一般に $\sqrt{10^{2a}} = 10^a$ です。また、$10^a > 0$ です。)
4. 600 km
5. (a) 6000 km $= 6 \times 10^6$ m (b) 5×10^{14} m^2 (c) 1×10^{21} m^3
6. (a) 時給 (単位は 円/時) (b) 密度 (単位は kg/m^3) あるいは比容という量 (単位は m^3/kg) もあります。 (c) 為替レート (例えば 80 [円/ドル])
7. 三つの観点から誤りがあります。単位は掛け算の一部と考えるべきなので、省略してはいけません。単位 h は立体にしなければなりません。最後に、答えの単位も間違っています。

$$10[\mathrm{km}] \div 2[\mathrm{h}] \quad = \quad \frac{10[\mathrm{km}]}{2[\mathrm{h}]} = 5[\mathrm{km/h}]$$

8. 100[km] $= 10^5$[m] なので、$\frac{10^5[\mathrm{m}]}{3\times 10^8[\mathrm{m/s}]} = \frac{1}{3} \times 10^{-3}[\mathrm{s}] \simeq 0.33 \times 10^{-3}[\mathrm{s}]$
9. 10[cm]
10. (a) 10^9 (b) 10^6 (c) 1.2 [g/L] (e) 36 [km/h]

3 章

1. 省略
2. 省略
3. いえません。ただし、静止するまでは等加速度運動といえます。
4. (a) m/s (b) $\mathrm{m/s^2}$ (c) kg $\mathrm{m/s^2}$ (d) kg m/s (e) kg $\mathrm{m^2/s^2}$ (f) kg $\mathrm{m^2/s^2}$ (g) kg $\mathrm{m^2/s}$ (h) $\mathrm{m^3}$ / kg $\mathrm{s^2}$
5. 式 (3.9) の左辺と右辺を、式 (3.8) の左辺と右辺で、それぞれ割ると、$\frac{a}{v} = \frac{v}{r}$ となる。
6. (a) 1 m/s (b) 10 m/s
7. 同じ速さで水や空気を後方に送り出しても、空気は密度が小さいので、後ろ向きの空気の運動量は小さい。そのため、体が得る前向きの運動量も小さくなる。
8. 省略
9. 省略
10. (a) 右側 (b) 右側 (c) 両側とも同じ程度
11. 14 m/s = 50.4 km/h

4 章

1. 省略
2. 互いに反発し合う向きに、それぞれ 3×10^{10} N の力が作用します。
3. 互いに反発し合う向きに、それぞれ 1×10^{6} N の力が作用します。
4. 両者には 1 N の力が作用します。向きについては図 4.1(p.59) を参照して下さい。
5. (a) 西向き (b) コイルの面から N 極を見て右回り (c) 互いに反発し合う向き (d) 互いに引き合う向き (同じ電荷なのに引き合う向きに力が発生することに注意して下さい。)
6. 省略
7. (a) N/Wb = A/m (b) N/m A = kg / s^2 A (c) N m / A = kg m^2 /s^2 A (d) kg m^2/s^2 s = kg m^2/s^3

5 章

1. 強いバネの方が弱いバネよりも速く振動します。おもりの質量が大きい場合の方が質量が小さい場合よりもゆっくり振動します。
2. 重力が強い場合の方が重力が弱い場合に比べて速く振動します。腕の長さが長い方が短い場合に比べてゆっくり振動します。
3. 0.248[m]
4. P 波によっては東西方向、S 波によっては南北方向・上下方向の振動を感じられると予想されます。もちろん実際にはより複雑です。
5. (a) 屈折
   (b) 屈折
   (c) 屈折
   (d) 回折
   (e) 回折
   (f) 干渉
   (g) 反射・屈折・干渉
   (h) 屈折

6 章

1. 省略
2. 省略

7 章

1. 20 万戸
2. チェルノブイリ原発事故 (放射性降下物) : 14000[PBq] = 1.4×10^{19}[Bq],
   福島第一原発事故 (大気への放出量) : 770[PBq] = 7.7×10^{17} [Bq]
3. 10833[kg] (約 11 トン, 2013 年末時点)
4. 25[μSv/h]
5. 約 6 分

付 録B　物理学に出てくる数学

B.1　はじめに

物理学を勉強するとどうしても数学を使うことがあります。数学には、物理学で必要だったから発達した、という側面があるので、物理学で数学を使うのは当たり前でもあります。むしろ、そのために数学ができている部分があるとしたら、物理学の立場からは、数学に深く感謝して、ありがたく数学を使わせてもらえばいいと思います。

ただし、残念ながらそこが物理学のハードルを高めている部分があると思います。高校までに学習した数学に対して、もしも苦手意識を植えつけられていたとしたら、大学で物理学を勉強するのは容易ではありません。そして、多くの学生は数学に対して苦手意識を持っているようです。

実際、私自身も物理学を勉強するに当たって、数学の力が足りないことを常に感じていました。ですから、多くの皆さんが抱いているような苦手意識は共感できます。そして、自分の経験から、とりあえず次の三つのことができるようになって欲しいと思っています。

1. 式の同値変形ができる。
2. 代入することができる。
3. 定義を受け入れることができる。

これらについて以下で簡単に説明してみましょう。

B.1.1　式の同値変形

5000 円札の枚数を x で表します。2000 円札の枚数を y で表します。すると次のような式が成り立ちます。

$$2x \quad = \quad 5y \tag{B.1}$$

この式は、両辺が同じ量 (この場合は 1 万円) であることを意味しています。この式 (B.1) 両辺に 2 を掛けると次のような式になります。

$$4x \quad = \quad 10y$$

2 枚の 5000 円札と 5 枚の 2000 円札が同じ金額であるならば、4 枚の 5000 円札と 10 枚の 2000 円札が同じ金額 (2 万円) であることは明かです。一般に、両辺に同じ値を掛けても等式は成り立ち続けます。

今度は、式 (B.1) の両辺から 5[枚]y を引いてみましょう。

$$2x - 5y \quad = \quad 0$$

5000 円札 2 枚をもらって、2000 円札 5 枚を返せば、受け取った金額はゼロということになります。式の意味は変わりましたが、この等式が成り立つことは間違いありません。一般に、両辺に同じ数を足したり引いたりしても等式は成り立ち続けます。

これらの例のように、両辺に同じ操作をして、式の形を変えることを同値変形といいます。同値変形は、2 次方程式の解の公式を導く手順で練習することができますので、これを復習してみましょう。

$$ax^2 + bx + c \quad = \quad 0 \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 & \text{(B.3)}\\
\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a} &= 0 & \text{(B.4)}\\
\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a}\right)-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a} &= 0 & \text{(B.5)}\\
\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right) &= \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} & \text{(B.6)}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} & \text{(B.7)}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} & \text{(B.8)}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{(B.9)}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{(B.10)}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & \text{(B.11)}
\end{aligned}$$

それぞれの段階でどのような式変形をしたでしょうか。自分でたどってみましょう。また、(B.3)、(B.8)、(B.9) への変形のときには気をつけなければならない点があります。それはどのような点か、考えてみましょう。

B.1.2　代入

手持ちの 500 円玉の枚数を x とすると、500 円玉の合計金額は 500[円/枚] $\times\, x$ となります。例えば、$x = 3$[枚] を代入すると、

$$\begin{aligned}
500[\text{円/枚}]\times x &= 500[\text{円/枚}]\times 3[\text{枚}]\\
&= 1500[\text{円}] & \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

となります。このように文字式の中で文字で表された変数を、特定の値や式で置き換えることを代入といいます。

ここで、あなたがあるゲームに勝利して、ゲーム参加者の男性から 500 円玉を 3 枚、女性から 2 枚をもらえるとします。男性の数を m、女性の数を f とします。500 円玉の合計金額を表す式 (B.12) の x に、何を代入すればいいでしょうか。また、その結果はどうなるでしょうか。

$$\begin{aligned}
& 500[\text{円/枚}]\times(3[\text{枚/人}]m+2[\text{枚/人}]f)\\
= \ & 1500[\text{円/人}]\times m+1000[\text{円/人}]\times f
\end{aligned}$$

ここで示したような文字式を別の文字式で置き換える操作は、物理学でよく現れます。決して難しくはありません。しかし、面倒ですし、慣れておかないと抵抗感が大きいと思います。ぜひ練習しておきましょう。

B.1.3　定義の受け入れ

物理学では、例えば**三角関数**をよく使います。三角関数の定義は、B.5 節に書いてあるのでそれも参考にしてください。

さて、「三角関数がどうもよく分からない」という感覚を持っている人がいるかもしれません。そしてそのために数学に苦手な意識を持つ人もいるでしょう。そのようなときに、ぜひ、しっかり意識してほしいのは、「三角関数自身を理解することは簡単である」ということです。B.5 節に書いたように、例えば正弦関数 sin は、次のようなものです。xy 平面で原点を中心とする単位円と動径 (中心と円周上の点を結ぶ線分の一つ) を考えます。このとき、動径の円周上の点の y 座標は、動径と x 軸とのなす角 θ の関数として表すことができます。それを $\sin\theta$ と定義しました。

このように、定義自身には分かるも分からないもありません。「それをそう決めました」という話です。実際に分かりにくいかもしれないのは、三角関数の性質です。三角関数には、様々な (便利な) 性質があります。しかし、そうした性質も、定義から派生する性質なので、定義をしっかり理解しておくことは大切です。

新しい数学用語が出てきたら、その定義をしっかり理解する、という習慣を身につけたいものです。

B.2　ギリシア文字

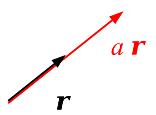
物理学では習慣で特定の物理量に対して、特定の文字を割り当てることが多いです。そうすることによって、式を見ただけである程度の意味が分かるようになります。例えば、質量 (mass) は、m で表す、といった具合です。

ところが、その一方で、物理学で用いる物理量は数が多いです。そこで、アルファベットの他に次のような**ギリシア文字**を用いることもあります。

小文字	大文字	斜字体	読み方
α	A	A	アルファ
β	B	B	ベータ
γ	Γ	$\mathit{\Gamma}$	ガンマ
δ	Δ	$\mathit{\Delta}$	デルタ
$\epsilon(\varepsilon)$	E	E	イプシロン
ζ	Z	Z	ゼータ
η	H	H	イータ
$\theta(\vartheta)$	θ	$\mathit{\Theta}$	シータ
ι	I	I	イオタ
κ	K	K	カッパ
λ	Λ	$\mathit{\Lambda}$	ラムダ
μ	M	M	ミュー
ν	N	N	ニュー
ξ	Ξ	$\mathit{\Xi}$	グザイ
o	O	O	オミクロン
$\pi(\varpi)$	Π	$\mathit{\Pi}$	パイ
$\rho(\varrho)$	P	P	ロー
$\sigma(\varsigma)$	Σ	$\mathit{\Sigma}$	シグマ
τ	T	T	タウ
υ	Υ	$\mathit{\Upsilon}$	ウプシロン
$\phi(\varphi)$	Φ	$\mathit{\Phi}$	ファイ
χ	X	X	カイ
ψ	Ψ	$\mathit{\Psi}$	プサイ
ω	Ω	$\mathit{\Omega}$	オメガ

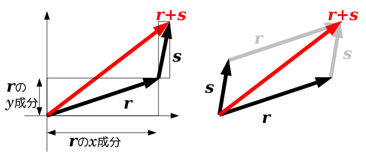
B.3　ベクトルについての簡単なまとめ

1. **スカラー**倍



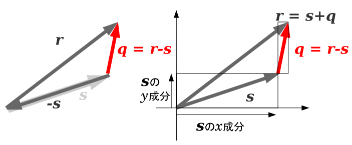
$$a\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

2. 足し算



$$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix}$$

3. 引き算



$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

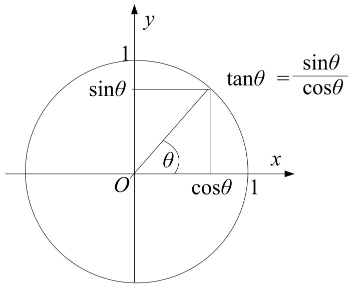
$$\begin{aligned} & \frac{m}{m+n}\boldsymbol{p} + \frac{n}{m+n}\boldsymbol{q} \\ = & \left(\frac{m+n}{m+n} - \frac{n}{m+n}\right)\boldsymbol{p} + \frac{n}{m+n}\boldsymbol{q} \\ = & \boldsymbol{p} + \frac{n}{m+n}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

B.4　指数法則についての簡単なまとめ

1. $A^pA^q = A^{p+q}$
2. $(A^p)^q = A^{pq}$
3. $(AB)^p = A^pB^p$
4. $\dfrac{A^p}{A^q} = A^{p-q}$
5. $A^0 = 1$
6. $A^{-q} = \frac{1}{A^q}$
7. $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}},\ \cdots$

B.5　三角関数についての簡単なまとめ

定義



その他の三角関数

1. “co”+左側の関数名→右側の関数名
2. ある三角関数は、その両隣の積
   例: $\sin\theta = \cos\theta \times \tan\theta$
3. 1 を挟んだ三角関数は互いに逆数
   例: $\cos\theta = 1/\sec\theta$
4. 暗い三角形：三平方の定理
   例： $\tan^2\theta + 1^2 = \sec^2\theta$

複素数の平面極座標表示と加法定理

$$
\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= \underline{\underline{\cos(\alpha+\beta)}} + i\ \underline{\sin(\alpha+\beta)} \\
e^{i\alpha}e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}} + i\left(\underline{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}\right)
\end{aligned}
$$

B.6　微分法についての簡単なまとめ

代表的な関数の微分

$$
\begin{aligned}
\frac{dt^n}{dt} &= nt^{n-1} \\
\frac{d\sin t}{dt} &= \cos t \\
\frac{de^t}{dt} &= e^t
\end{aligned}
$$

微分法の公式

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(af(t)\right) &= a\frac{df(t)}{dt} \qquad (a\text{ は定数}) \\
\frac{d}{dt}\left(f(t)+g(t)\right) &= \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt} \\
\frac{d}{dt}\left(f(t)\times g(t)\right) &= \frac{df(t)}{dt}\times g(t) + f(t)\times\frac{dg(t)}{dt} \\
\frac{df(g(t))}{dt} &= \frac{df(g)}{dg}\times\frac{dg(t)}{dt} \\
\frac{df^{-1}(t)}{dt} &= \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}} \qquad (\text{ただし、}x = f^{-1}(t),\quad f(x) = t)
\end{aligned}
$$

索 引