

物理学概論と数学

物理学概論では数学を使います。高校までの学習がうまくいかなかった人もいます。そんな人は、このプリントをベースに、質問してください。

1 対応関係

対応関係はとても大切な考え方です。まずは、対応の歌 で考えてみましょう。

2 代入

式は文字で現されることが多いです。なぜならば、質量について $1[\text{kg}]$ のとき、 $2.5[\text{kg}]$ のとき... とすべての場合を記述するのではなく、それらを代表して m と書いた方が簡単だからです¹。質量を m に対応させるという対応関係がわかったら、次は、逆に具体化することを考えます。例えば代入です。

次の値を代入して mg の値を計算してみましょう。

- $m = 2[\text{kg}], g = 9.8[\text{m/s}^2]$ _____

- $m = 5[\text{kg}], g = 1.6[\text{m/s}^2]$ _____

代入するのは数値とは限りません。文字式を代入することもあります。 F のところに mg を代入してみましょう。そして、できれば、式を整理してみましょう。

- $F = ma$ _____

- $F = m\frac{v^2}{r}$ _____

上の例では、単独の F に代入しました。しかし、例えば、次の式の v に $v = \frac{2\pi r}{T}$ を代入することもあります。計算用紙を自分で準備して、丁寧に計算してみましょう。手順としては、まず、文字が下記並べてあったら掛け算であるということを思い出しましょう。そして、 v のところを $\frac{2\pi r}{T}$ で置き換えてみてください。あとは、普通に計算すればよいのです。

- $\frac{2\pi v}{T}$ _____

代入はできたけど、式の変形がうまくいかないと思った人は、次の等式の変形で練習しましょう。

3 式の変形

代入はできたけど、式変形ができなかった人もいるでしょう。ここで練習してみましょう。高校までで、「移項すると符号が変わる」とか、「移項すると割り算になる」とか、いろいろと覚えた人もいます。それらは全部忘れて下さい！ただ単に、次のことを覚えましょう。等式は、両辺に同じ操作をしても等式のままであるということです。具体的には、

$$x + 2 = 0$$

¹それが簡単だと思わない人は、一生、数字を書きつけてください！

を例に考えましょう。ちょっと考えると、 $x = -2$ だな、とわかると思います。しかし、それをここでは、次のように考えます。等式は両辺に同じ操作をしても等式のままなので、両辺に -2 を足します。 x を裸にするためです。すると、次のようになります。

$$\begin{aligned}x + 2 - 2 &= 0 - 2 \\x &= -2\end{aligned}$$

理屈がわかったら、指示にしたがって変形して下さい。

- $x + 3 = 17$ 両辺から 3 を引く _____
- $x - a = 17 - 2a$ 両辺に a をたす _____
- $2x = 8$ 両辺を 2 でわる _____
- $\frac{x}{r} = z$ 両辺に r をかける _____
- $\sqrt{x} = 3y$ 両辺を 2 乗する _____
- $\frac{x-b}{r} = z$ 両辺に r をかけて、その後 b をたす _____
- $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$ 両辺に $\frac{3}{5}x$ をかける _____
- $\frac{5b}{a} + \frac{3}{4ab}$ 通分してたす _____
- $ax = b$ 両辺を a でわる (注意! $a \neq 0$ のときだけ!) _____
- $x^2 = b^2$ 両辺の平方根を計算する _____

(注意! $3^2 = (-3)^2$ という例もある!)

これらがわかったら、今度は分数について考えてみます。例えば、

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

であることを知っていると思います。この時の分数の基本的な考え方は、分子と分母に同じ数をかけても値は変わらないということです。

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

ということです。それがわかれば、次の分数を簡単にすることができるはずです。

- $\frac{1}{10}$ 分子と分母にそれぞれ 10 をかける _____
- $\frac{2}{3}$ 分子と分母にそれぞれ 5 をかける _____
- $\frac{2\pi \frac{2\pi r}{T}}{T}$ 分子と分母にそれぞれ T をかける _____

ここまでわかったら、2次方程式の解の公式を求めてみましょう。もうできるはずです。いい練習になりますので、繰り返して、このプリントを見なくてもできるようにしておきましょう。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \quad (3)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (4)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (5)$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}\right| \quad (6)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (7)$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (8)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \quad (9)$$

課題

- 等式は、両辺に同じ操作をしても等しいままであるという性質がある。各段階で、それぞれどのような操作を施したか。
- 等式の変形では、特に注意しなければならない場合がある。上の変形の場合には、(2), (6) 式を得る段階で、それぞれ注意が必要である。どのような注意か。
- 求められた解のうちの一つ、 $x = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ を、(1) 式に代入してみて、等式が成り立つことを確かめなさい。
- このプリントを見ずに、2次方程式の解が得られるようにしなさい。

4 比例

対応の歌 には「あれがわかれば、これがわかる」という節があります。比例はそのような関係の代表格です。

例えば、鉛筆の本数 (n) とその代金 (m) です。本数がわかれば、代金が出る、という対応関係は、比例関係です。この比例関係を式で書いてみましょう。

$$m = an$$

ここで現れた a は比例係数 (比例定数) と呼ばれています。例えばこの場合の比例係数は単価と呼ばれていて $a = 30$ 円/本 と表せます。

今まで学習したのから比例するものの組み合わせを例として挙げてみましょう。空欄は自分で埋めてみましょう。

\	ある量 (m , 知っている量)	比例定数 (a)	もう一つの量 (n , 知りたい量)
例 1	_____	_____ 速度 _____	_____
例 2	_____	_____	_____ 電流 _____
例 3	_____	_____	_____

鉛筆の本数と代金を下の余白にグラフで表してみましょう。グラフは普通、知っている量を横軸に、知りたい量を縦軸にとる習慣がありますので、意識してみましょう。そのとき、単価はグラフの何と関係があるでしょうか。