解析力学の例題：有限振幅振り子

問題設定

たわまない軽い棒の先端に質量 m の質点があり、他端は固定され、固定点の周りに摩擦なく回転できるとする。一定の重力加速度の下での振り子の運動を考える。高校まででも学ぶ単振子は、振幅 (振れ幅) が小さい場合を考えたものである。ここでは、振幅が大きい場合も含めて考えることにする。なお、有限振幅を考える場合には、単振子で成り立つ等時性は適用できない。この点には注意する必要がある。

最下点から振り子の振れ角を θ とし、これを一般化座標とする。θ については符号も考え、向かって反時計周りに回転する向きを正とする。

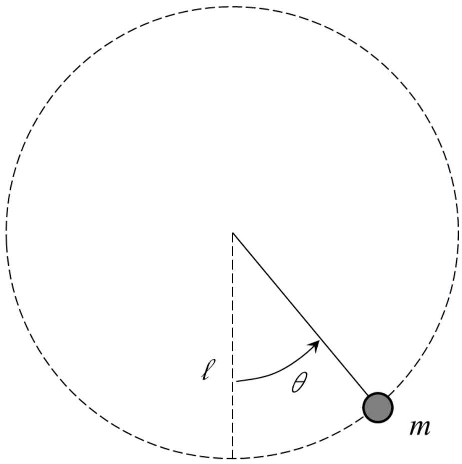

図 1: 設定

ラグランジュの解析力学

座標 θ とその時間変化 $\dot{\theta}$ で、ラグランジアンを記述する。運動エネルギー $T(\theta, \dot{\theta})$ は、質点の速さ $\ell\dot{\theta}$ であることから、

$$T(\theta, \dot{\theta}) \quad = \quad \frac{m}{2}\left(\ell\dot{\theta}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

であり、位置エネルギー $U(\theta, \dot{\theta})$ は、最下点を基準にすると質点の高さが $\ell(1-\cos\theta)$ となることから、

$$U(\theta, \dot{\theta}) \quad = \quad mg\ell(1-\cos\theta) \tag{2}$$

となる。そこで、ラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} L(\theta, \dot{\theta}) &\equiv T(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta, \dot{\theta}) \\ &= \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{3}$$

これらから、ラグランジュの運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}m\ell^2\dot{\theta} &= -mg\ell\sin\theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{aligned} \tag{4}$$

θ が十分小さいときには、$\sin\theta \sim \theta$ と近似できるので、(4) 式は

$$\ddot{\theta} \;=\; -\frac{g}{\ell}\theta \tag{5}$$

と近似される。$\theta = A\sin\omega t$ と置くことにより、角速度 $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$、また、周期 $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ を得る。これらはよく知られた微小振幅の単振動の結果である。

ハミルトンの解析力学

以下では角度 θ を q と書き改めることにする。一般的な解析力学と表記を揃えるためである。

ラグランジアンが式 (3) のように定まると、一般化運動量 p を定義することができる。

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\ &= m\ell^2\dot{q} \end{aligned} \tag{6}$$

ハミルトニアン $H(q,p)$ は、定義により

$$\begin{aligned} H(q,p) &\equiv p\dot{q} - L \\ &= p\frac{p}{m\ell^2} - \left(\frac{p^2}{2m\ell^2} - mg\ell(1-\cos q)\right) \\ &= \frac{p^2}{2m\ell^2} + mg\ell(1-\cos q) \end{aligned} \tag{7}$$

となる。H は、q, p の関数であるので、$\dot{q}$(つまり $\dot{\theta}$) を用いずに表してある。次の式を正準方程式という。

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \tag{9}$$

これを (7) 式に与えられたハミルトニアンを用いて具体的に計算すると次のようになる。

$$\frac{p}{m\ell^2} = \dot{q} \tag{10}$$

$$mg\ell\sin q = -\dot{p} \tag{11}$$

q と p で張られる空間を位相空間という。位相空間内の点は、特定の q と p に対応していることから、運動の状態を表していると言える。その後の運動の状態の変化は、初期の運動の状態が定まれば一意に決定される。具体的には、q と p の関数として、点の移動速度 $\dot{q}$ と $\dot{p}$ が定まるのである。有限振幅の振り子の場合には、それらは具体的に式 (10) と式 (11) で表される。

次の位相空間の図で、図中の線はハミルトニアン $H(q,p)$ の等値線である。矢印は $\dot{q}, \dot{p}$ をベクトルとして図示したものである。この図からいくつかわかることがある。

1. 力学的エネルギーの保存

   ベクトルと等値線を見比べると、ベクトルは H の等値線に沿っていることがわかる。H は全力学的エネルギーに対応しているので、H に沿った運動であることは、力学的エネルギーが保存することに対応している。

2. 微小振幅の単振動

   振幅が非常に小さいとき、位相空間上の点は、原点の周辺で時計回りに回転する。これは、角度 q が有限の範囲で振動することに対応している。原点近傍では、ベクトルは小さく、離れるほど大きくなる。これは、振幅が大きいほど速く運動することに対応している。よく知られているように、微小振幅の単振子の場合には、振子の等時性が成り立つ。

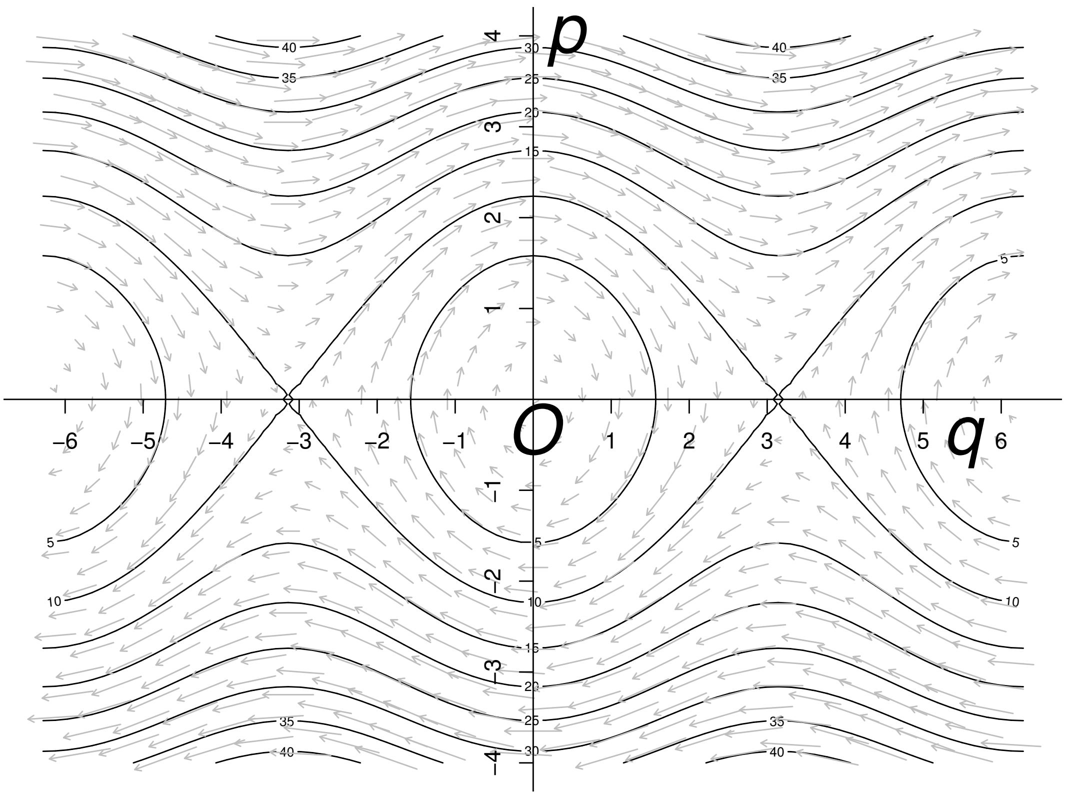

図 2: 位相空間

3. 力学的エネルギ-が十分大きい場合

   エネルギ-が大きい場合には、もはや原点周辺でハミルトニアン H の等値線は閉じなくなる。そして、角度 q は常に増大し続けるか、減少し続けることになる。

   これは、勢い余って、一番高いところを通り過ぎ、ぐるぐる回転する状態に対応している。

4. 倒立している場合

   $q=\pi$、$p=0$ の点について考えてみよう (この点の周辺は、おそらくは作図した統計パッケージ R の等値線アルゴリズムの欠陥によって、表示がおかしくなっている)。$p=0$ ということは、質点は静止している。一方で、$q=\pi$ ということは、振子が倒立していることを表している。このような状態は不安定で、どちらかに少しでもずれると運動が生じる。しかし、理論上は倒立して静止する場合がありうる。

   静止しているということは、直前の状態も静止しているはずであるので、実はこの点に到達することはできない。この点につながるハミルトニアン H の等値線に沿った運動を考えることはできる。しかし、静止した状態に到達することはできないことから、無限の時間をかけて $q=\pi$ に近づくことが予想される。実際、図 2 をみると、この点の周辺で矢印が短いことが確かめられる。

リウヴィルの定理のイメージ

位相空間内の点がその後どのように移動するかを計算機によって計算することができる。以下ではその例をいくつか示す。赤く示された隣接する 4 点が一定時間経過後、どこを通ってどこまで行くかが示されている。

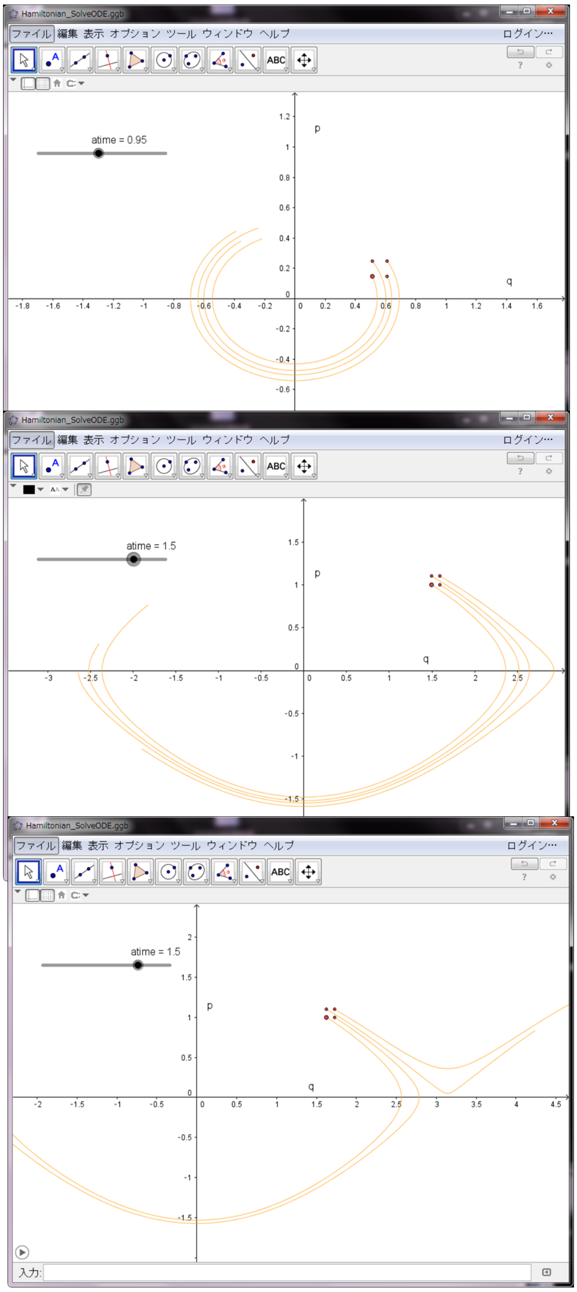

図 3: 位相空間上の軌跡

1. 振子の振幅が小さいとき：四角形の形状を保ちながら移動する。(図 3 上)
2. 振子の振幅が大きいとき：振幅が大きいものほど遅れる。(図 3 中)
3. さらに振子の振幅が大きいとき：最上点を過ぎて回転し始める。(図 3 下)

4 点でできる四角形は、時間とともに変形する。しかし、面積は保たれそうな気がする（なんとなく）。