12 友達の友達の友達

12.1 ねずみ算と雪だるま式

数の増え方に関して、日本では「雪だるま式に膨らんで」とか、「ねずみ算的に増えて」という言い方があります。

まず、「雪だるま式に膨らんで」という表現について考えてみましょう。皆さんは雪だるまを作ったことがあるでしょうか？雪だるまは、はじめの玉は手で固めて作りますが、それ以降は転がして作った方が楽です。転がすと、玉の下の雪が圧迫されて、自動的に玉に付着します。そうすることでどんどん大きな雪だるまを作ることができます。簡単のために、玉を一直線上で一定の速度で転がすと考えましょう。そして、玉の下の雪が全て付着したと考えます。転がす向きを変えなければ、横方向には大きくなりませんから、玉というよりも一定の太さのタイヤがどんどん大きくなるような状況です。このときの玉 (あるいはタイヤ) の質量 (重さ) が時間と共にどのように大きくなるかを考えると、増えた雪の量は、タイヤの通った面積、つまり、タイヤの移動距離に比例します。そこで、雪の増える量は時間に比例することになります。

次に、ねずみ算についてです。ねずみが、生まれてから 1ヶ月で親になり子供を生むと仮定しましょう。また、メスは 1 度に 10 匹の子供を生むとし、生まれるのはオスとメスが半分ずつとします。

するとどうなるでしょう。もともと 2 匹だったねずみが 10 匹のねずみを産んだのが 1 月として考えると、2 月には合計 12 匹のねずみ (メスは 6 匹) から $6 \times 10 = 60$ 匹のねずみが生まれます。合計 72 匹になります。3 月には、合計 72 匹のねずみ (メスは 36 匹) から、$36 \times 10 = 360$ 匹生まれ、合計 432 匹になります。これを繰り返していくとどうなるでしょうか。調べた結果を表にしてみます。

月	親の数	生まれる子の数	合計
1	2	10	12
2	12	60	72
3	72	360	432
4	432	2160	2592
5	2592	12960	15552
6	15552	77760	93312
7	93312	466560	559872
8	559872	2799360	3359232
9	3359232	16796160	20155392
10	20155392	100776960	120932352
11	120932352	604661760	725594112
12	725594112	3627970560	4353564672

こうしてみてみると、規則性があることがわかります。どの列を見ても、ひと月経つと、数が 6 倍になっています。

それでは、「雪だるま式」と「ねずみ算式」と、どちらが増え方が大きいでしょうか。それを調べるためにはグラフにしてみると便利です。このグラフを見ると、ある程度の長い時間が経つと

「ねずみ算式」の方が急激に大きくなりそうです。

このような増え方の違いは、マルサスの人口論でも議論されています。人間の増え方はネズミ算式です。これをマルサスの人口論では、幾何級数的とか、等比数列的とかいった表現を使いますが、数学的には、指数関数的な増え方といいます。それに対して、農業の生産力は雪だるま式です。これをマルサスの人口論では、算術級数的とか、等差数列的と表現しています。数学的には代数的な増え方といいます。代数的な増加に対して、指数関数的な増加は圧倒的であるので、やがては食料生産は人口の増加に追いつかなくなる、という議論です。ちなみに、現在、一見食料生産が逼迫していない (日本で食料が不足していない) ように見えるのは、もちろん、途上国にその負荷を押し付けている部分もあります。そして、化学肥料が用いられるようになったことも重要なポイントです。ちなみに、農業生産を高めた化学肥料も、その重要な原料であるリン鉱石があと数十年で枯渇するので、安定的に供給できなくなるでしょう。

さて、「ねずみ算式」な増え方というものの例は他にもあるでしょうか。おそらく、このようないい方は少なくとも江戸時代にはあったと想像します。「〜算」といういい方は、やや古い言い方であるように思いますし、江戸時代にはいろいろな数学が既に発達していたからです。それでは江戸時代の人にとっての「ねずみ算式」に増えるものは何だったのでしょうか。

12.2　金利計算

その一つの例は借金です。借金をすると、余分にお金を返さなければなりません。余分なお金の分を利子といいます。利子は法律で上限が決まっています。しかし、ここでは簡単のために、毎月10%の利子がつくこと仮定して計算しましょう。最初に 10 万円の借金をしたとします。10% 増えるのですから、1ヶ月後には 11 万円の借金になります。2ヶ月後には、11 万円の 10%が増えますから、1 万 1 千円増えて、12 万 1 千円になります。このような計算を複利計算と言います。

さて、段々大変なことになりそうなことがわかります。実際に数字をあげてみましょう。

経過時間	借金総額
1ヶ月後	110,000
2ヶ月後	121,000
3ヶ月後	133,100
4ヶ月後	146,410
5ヶ月後	161,051
6ヶ月後	177,156
7ヶ月後	194,872
8ヶ月後	214,359
9ヶ月後	235,795
10ヶ月後	259,374
11ヶ月後	285,312
12ヶ月後	313,842
2 年後	984,973
3 年後	3,091,268
4 年後	9,701,723
5 年後	30,448,165

2 年でおおよそ 10 倍、4 年でおおよそ 100 倍になってしまいます。これは極端な例ではありますが、借金を放っておくととんでもないことになることがわかります。

12.3 紙の厚さ

お金の話、しかも、何年後のお金、となるとピンとこないかもしれません。そこで、もっと身近な例を挙げてみましょう。それは、紙です。ここでは、仮に、紙の厚さを 0.1 mm としましょう。それを折りたたんでいくとどうのような厚さになるのか、考えてみましょう。

1 回折りたたむと、厚さは 0.2 mm になります。
2 回折りたたむと、厚さは 0.4 mm になります。
3 回折りたたむと、厚さは 0.8 mm になります。
4 回折りたたむと、厚さは 1.8 mm になります。
5 回折りたたむと、厚さは 3.2 mm になります。
6 回折りたたむと、厚さは 6.4 mm になります。
7 回折りたたむと、厚さは 12.8 mm = 1.28 cm になります。
8 回折りたたむと、厚さは 2.56 cm になります。
9 回折りたたむと、厚さは 5.12 cm になります。
10 回折りたたむと、厚さは 10.24 cm になります。

この計算を繰り返すと、

20 回：104.9m
25 回：3355.4m 〜 富士山の高さ程度
42 回：43.9 万 km 月までの距離よりも長い

となります。わたしたちが日常生活で扱える程度の回数で、天文学的な長さになることがわかり

ます。

12.4　友達の友達の数

人間は社会的な生き物なので、全く他の人の手助けなしに生きていくことはできません。例えば、自分で畑を耕し、自分でそれを食べる場合でも、どんな食物が食べられるのか、どのようにすれば田や畑を作ることができるのか、そうしたことを学ばなければできません。まして、都会に暮らす人々は、自分で食物を作っていないのですから、他の人の助けなしに生きることは不可能です。そこで、人間には、必ず誰か知合いがいます。場合によっては、過去の人 (故人) であったり、ネット越しの知合いかもしれせん。

ケビン・ベーコンという映画俳優がいます。この俳優は、ふとしたことから有名になりました。というのも、アメリカの映画俳優の誰もが、４人を介してケビン・ベーコンとつながりがあるという話がもちあがったからです。そして、ケビン・ベーコンと何人を介してつながっているかで、ベーコン数というものを決めました。例えば、

チャップリン
- 映画「伯爵夫人」-
マーロン・ブランド
- 映画「地獄の黙示録」-
ローレンス・フィッシュバーン
- 映画「クイックシルバー」 -
ケビンベーコン

といった具合に。1995 年頃にこれに気づいた大学生たちがいました。そして、2000 年ごろまでにかけて、これを題材にしたゲームや話題が世間を賑わしたようです[20]。

さて、それでは、私たちはどれくらいの人を介してケビン・ベーコンとつながっているでしょうか。私達のベーコン数はいくつでしょうか。そんなことを考えてみましょう。

簡単のために、みなさんの知合いが 500 人いたとしましょう。人によってはもっといるかもしれませんし、もっと少ないと言う人もいるでしょう。しかし、幼稚園のころの知合い、小学校・中学・高校、そして大学の知合いや、その他にアルバイト先、親類などを入れると、多くの人が数百人の知合いがいると思われます。とにかく、500 人の知合いがいたとしましょう。

次に、それぞれの人の知合いがあまり重複していないとします。友達の知合いは、自分の知合いであることが多いのですが、それは置いておきます。

すると導き出される結論は、「知合いの知合い」は、$500 \times 500 = 250000$ 人になるということです。ゼロが多いと嫌になりますね。そこで、25 万人という書き方にしましょう。では、同様に、「知合いの知合いの知合い」を計算してみましょう。$250000 \times 500 = 125000000$ 人です。つまり 1 億 2 千 5 百万人です。これは、日本の人口とほぼ同じです。つまり、このような仮定をすると、日本中の人は、みなさんの「知合いの知合いの知合い」になるはずです。繰り返しますが、どこかに隠れ住んでいる人など、極端に知合いが少ない人は例外として存在するでしょう。しかし、いずれにしても、多くの場合には「知合いの知合いの知合い」でカバーできるはずです。

私はみなさんの知合いですが、私の知合いには宇宙飛行士や国会議員がいます。そこで、日本人

[20] この段落の内容は、「SYNC なぜ自然はシンクロしたがるか」に基づいています

宇宙飛行士の全員は、確実に、みなさんの「知合いの知合いの知合い」ですし、国会議員の、おそらく半数ぐらいは、「知合いの知合いの知合い」でしょう。そう聞くと、案外間違いでもなさそうだ、という気になってきませんか？

更に、「知合いの知合いの知合いの知合い」を考えてみましょう。$125000000 \times 500 = 62500000000$ 人です。これは、625 億人です。私達の住む地球上の人口 (約 60 億人) をはるかに上回っています。地球上の人は、「知合いの知合いの知合いの知合い」でかなりの範囲をカバーできるに違いありません。私の友人はイギリスに住んでいますし、ロシアやフィンランドには親しい仲間もいます。みなさんも GO プログラムなどで海外に知合いを作ると、一気に世界は縮んだように感じることができるはずです。

12.5　次々に分裂する (仮想的な) 生物の増え方

次のような問題を考えてみましょう。

> 問題
> ある仮想的な生物を考える。この生物は、一つの細胞だけでできている生物で、二つに細胞分裂して増える。条件を整えると、分裂後、1 時間で再び分裂するようになる。
> この生物を、専門の容器内で、条件を整えて増やしたところ、100 時間かけて容器の半分にまで増やすことに成功した。
> この生物を容器いっぱいまでに増やすのに、後どれだけの時間が必要だろうか。

みなさんはすぐに答えがわかったでしょうか。もちろん、実際にはこのような生物はいないでしょうし、いたとしても数が増えるに従って、生物に必要な栄養・水・酸素などが不足しがちになります。そういう意味で、条件を整えることはとても難しくなります。ここでは、そういった問題を度外視して考えましょう、ということです。

さて、肝心の答えです。答えは 1 時間です。これまでどれほどの時間がかかったかは関係ありません。1 時間で 2 倍になるのですから、現時点で半分だとすれば、1 時間後には 2 倍になります。

答えはわかったとして、今度は逆に、時間をさかのぼって前の状態がどうだったかを考えていきましょう。現時点で半分なので、1 時間前には 1/4 です。2 時間前には 1/8 です。3 時間前には 1/16 です。このように、時間をさかのぼると、数は急速に減っていきます。

12.6　フィードバック

ハウリング

マイクとスピーカが近い時に、ボワーンとした音やキィーンとした音が大きく鳴ることがあります。これをハウリングといいます。ハウリングはどのようにして起こるのでしょうか。

通常、マイクとスピーカの間には、アンプと呼ばれる装置が入っています。アンプは増幅器ともいいます。電気信号を大きくする (増幅する) 装置です。マイクは、音声信号を電気信号に変換して取り込みます。アンプはそれを増幅します。そして、スピーカは増幅された信号をふたたび音声信号に変換して鳴らす訳です。

さて、このようなマイクとスピーカの組合せがあるときに、マイクとスピーカを近づけてみることを考えてみましょう。マイクが何か雑音を拾うと、それが増幅されてスピーカで鳴り

ます。いま、マイクがスピーカの近くにある場合を考えていますから、スピーカで鳴った音がマイクに入ります。そうしてマイクに入った音声はまたまた増幅されてスピーカから鳴るようになります。たとえば、マイクから入った信号が、スピーカを通して、またマイクに入るときに、1.1 倍になったとしましょう。すると、2 回繰り返せば $1.1 \times 1.1 = 1.21$ 倍、3 回繰り返せば、$1.21 \times 1.1 = 1.331$ 倍、10 回繰り返せば 2.6 倍、20 回繰り返せば 6.7 倍、100 回繰り返せば、13,781 倍になります。電気回路ではほとんど瞬時に信号が伝わりますから、短い時間にとてつもなく大きな音になります。このようにしてどんどん音が大きくなってしまう現象がハウリングです。

このハウリングが続くと、爆発的な音の大きさになってもいいのですが、実際にはそうはなりません。アンプの性能として、ある程度大きい信号は増幅できなくなります。そこで、無限に大きな音が発生するようにはなりません。また、何よりも、最近のアンプにはハウリングを防ぐような回路が入っているようです。先の生物の例と同様に、実際には音の増幅には限界がある訳です。

フィードバック

ハウリングを別の観点から考えてみましょう。原因 (マイクが音を拾う) から発生する結果 (スピーカから音がでる) が、再び原因 (スピーカから出た音をマイクが拾う) となったために繰り返し増幅が行われるわけです。このように、結果が影響して再び原因となるようなシステムを、一般にフィードバックといいます。その中でも、ハウリングで見たように、最初の (静かな) 状態からどんどん離れていくようなフィードバックを正のフィードバック、最初の状態に戻ろうとするようなフィードバックを負のフィードバックといいます。

正のフィードバックの例

ハウリングは正のフィードバックの例でした。それでは、他にどのような正のフィードバックがあるでしょうか。

例えば、アイス・アルベド フィードバックは気候システムの中でよく知られたフィードバックです。例えば、地球の表面の雪氷が何らかの理由で増えたとしましょう (原因)。すると、氷は太陽光線を反射しやすいので地球の温度は低下する (結果) と考えられます。地球の温度が低下すると、雪が降りやすく、また、地表の水は氷易くなります。そのため、地球の表面の雪氷の面積は増えると予想されます。これを繰り返すと、地球は急速に寒冷化すると考えられます。

ちなみに、実際に 6 億年前に地球全体が凍ってしまったのではないか、ということが考えられています。この説は、スノーボール仮設として知られています。

その他に、講義の品質と学生の講義態度には、やはり正のフィードバックが作用していると考えられます。教員が良い講義を行えば、学生も積極的になり、学生が積極的になれば、教員も頑張って良い講義をしようとします。あるいは、悪い講義の場合には、学生がやる気を無くし、それを感じた教員も手抜きをするでしょう。そのために、講義の品質はもっと下がることになるでしょう。こうした例は正のフィードバックです。

正のフィードバックの場合、これまで見たように、最初の状態から指数関数的に離れていくことになると考えられます。

負のフィードバックの例

今度は負のフィードバックの例を挙げてみましょう。

同じように気候に関連した例として、「ガイア仮説」を紹介したいと思います。ある惑星に、白っぽい花と、黒っぽい花の二種類の花が生息していたとします。何らかの影響で惑星の気温が下がったとします (原因)。その際、生き延びるのは、どちらの花でしょうか。太陽からの光を受けて自らの温度を上げやすい黒っぽい花の方です。そこで、白っぽい花は生息数を減らし、黒っぽい花がむしろ広く分布するようになるでしょう (結果)。すると、惑星全体が黒っぽくなり、太陽光線を効率的に受け取りやすくなります。そして、惑星の気温を上げる効果が生じるでしょう。結果的に、惑星の気温は、花が生息していない場合よりも変化が小さくなることが予想されます。惑星の気温が上がった場合には逆に白い花が増えて気温を押し下げる効果をもたらすことが予想されます。

惑星に生物が生存することで、惑星の気候が安定する効果があるのではないか、とするのがガイア仮設です。

12.7 複雑系科学

ここまで紹介したような話は、どのような物理学的な意味があるのか、改めて考えてみましょう。

例えば、ベーコン数の例について考えてみましょう。世界中の人間が、4 人程度の人を介して継っていることは、実は弊害もあります。インフルエンザや HIV など感染症は拡大しやすいことを意味しています。実際、ヨーロッパではペストが流行して人口の 1/3 が失われてしまったこともありますし、インフルエンザの大流行で 100 万人単位で人が亡くなったこともありました。このような感染拡大 (パンデミック) はどうやったら防ぐことができるのか、それを考えることは重要なテーマです。

次の例として、薬について考えてみましょう。薬には副作用があり、特定の薬の組合せで服用すると非常に危険な場合があります。逆に、漢方薬では、複数の種類の漢方薬を組み合わせて (例えば 3 種類の漢方薬を組み合わせて) 初めて効果が出る場合があります。しかしどうでしょう。人類がこれまで薬として利用しているものは、数万にも及ぶでしょう。その二つの組合せは数億以上になり、三つの組合せは数兆以上にもなります。とても簡単に実験して調べられる数ではありません。そこで、何らかの方法で調べなればならいない組み合わせを絞っていくことが重要になってきます。

三つめは遺伝子です。生物学の発達により、細胞内の遺伝情報を読み取ることができるようになってきました。そのためにいろいろな問題が発生しつつあります。例えば、人工的に遺伝情報を変更して便利な生物を誕生させりしています。病気に強い大豆などです。しかし、そうした遺伝子操作によってできた作物は、果たして人間に害はないのでしょうか。生体の中には様々なたんぱく質があり、そうしたたんぱく質が、相互に影響しあっていることが考えられます。そうした状況下での安全性を考えることは、非常に困難な問題です。

このように、これからの人間は、沢山の数の組合せやつながりがあることを前提として、それをどう扱うか、どうコントロールするか、ということを考えていかなければなりません。そして、こうしたことを研究する学問は、複雑系科学とよばれ、近年、研究が進みつつあります。